TECUM 数理教育セミナー

セミナー講演資料

研究機関誌『数理教育のロゴスとプラクシス 2021 年 2 月号』

Mt. Fuji and Cherry Blossoms

Special Thanks to Keigo Kawakubo for his nice ideas to draw the picture by TikZ

TECUM 機関誌委員会編

2021 年 2 月 14 日

2020 年度第 4 回定期研究会を迎えて

2021 年 2 月 14 日
特定非営利活動法人 TECUM
理事長　長岡 亮介

法人が成立してから 2 回目の完全な年度が過ぎようとしています。

数学という深遠で崇高な学理と、そのような学理とは無縁に人生を生きる『ふつうの人々』が現代という時代を知的に生きるための数学教育という人類史に刻まれた実戦的な課題を、資本主義的な市場原理や広告宣伝が支配的な力を握る世界で、いかにして調和させることができるか、という《現実的課題》への《理論的な対応》を模索して来ました。

言い替えれば、現世的な利益とは無縁の思索や発見の苦しみや喜びを、それが分かる人々と共有する、という、K. マルクス的にいえば、《人間の人間に対する真に人間的な体験》を、利益を最大にすることにしか関心のない現世の人々の、とはいえ、現世に染まり切っていない子どもたちの中に潜む可能性を信じて、いかにして、魂を揺り動かし覚醒させて、眠っていた可能性を引き出す educare [羅] か、という不可能にも見える大胆不敵な試みを実現する《数学教育の持つ不思議な力》を学校現場のできる限り多くの先生方との協働で共有／拡大／普及して行きたいという願いの実践です。

この願いが普遍性を獲得し得るか否かが今後本格的に問われて来ます。

団結して頑張りましょう！孤独に悩む全国の数学教員たちよ！

忘れないようにしましょう！ 逆境こそ好機であることを！

内なる大声で唱和しましょう！
いかなる困難も私達をひるませることはできない、と！

TECUM の活動を誇りにしましょう！
こんな喜びを人々に伝える奉仕活動を使命を有していることを！

目 次

第I部

《評価》と《コロナ禍での授業》

そもそも教育における評価とは何か、何であるべきか？

長岡 亮介

成績評価は、学校という《資格認定》を売り物にする学校、教育機関の生命線である。試験という教育的にはばかげた制度が忙しい学校生活の中で大きな役割をはたして来たのはそのためである。
それが、感染性と致死率の高い感染症の不可視の蔓延可能性で、いま危機に瀕している。
そこで、《成績 achievement 》の《評価 assessment 》という問題を、少し《理論的》《歴史的》《文化的》に考えてみたい。

1 わが国で評価が問題とされて来なかった理由 — 西欧先進国との違い

いま、SARS-Cov2 の感染の 「拡大」と「重篤で急激な症状の患者」が若年層にまで「拡大」している、という「統計的なデータ」の「情報分析」を受けて、「非常事態宣言」による「不要不急の活動」の「自粛」が多くの都市圏で要請されている。子どもや青年にとって《必須、緊急の活動であるはずの教育》まで「遠隔／オンライン」化の流れが様々なレベルで試みられており、その中で「遠隔／オンライン」化が困難な《試験と成績評価》の問題が浮かび上がり大きな注目を浴びている。海外では広く ***assessment*** と呼ばれ、長年に渡って教育の最重要問題と見なされて来たこの問題に関しては、わが国では単純な「各科目の点数の総和」という《成績の線形順序構造に対する素朴な信仰》を神道、仏教以上に強く根付く国教のように支配的な国民的合意であった。しかし、OECD が行う PISA[1]などに見られる日本の学生の身につけた **knowledge/skill** [2]のあまりの《硬直性》が、ジャーナリストなど、**教育問題に関心を持つ非教育関係者** に注目され、世間に大きな話題を提供している。純粋学問を追求する一部の人間を除けば、学校教育で受けた初等数学の《基盤的な基礎の理解》と《その弾力的応用への準備の心得 well-preparedness》（これらこそが *knowledge* と *skill* である！）の育成こそ、言い替えれば、**いかに無関係にみえる場面にすら数学的な思考が応用され得る**[3]**という**

[1]Programmes for Intenternational Student Assessment , わが国ではこれを「国際学力達成度調査」などをとんでもなく誤訳されている！「学生の（身につけている）能力の国際比較計画」と直訳する方が良い。

[2]これもわが国では「知識」／「技能」というあまり適切とはいえない「直訳」で流通している。

[3]これを英語圏の数学教育では ***transfer*** という。なお、「応用」に相当すると思われている application は、数学的な世界で完結する純粋数学 pure mathematics を数学的な世界を超えて適用 apply する試みであるから、数学の確実な基礎的な理解に加え、応用すべき数学外の学理や技術についての経験、知識、関心が重要な前提的要素となるものであり、したがって、一般には「純粋な学校数学」よりも、はるかに難しい分野である。到底学校数学の手におえる代物ではないこと

確信を支える深い数学的理解と広い数学的文化の素養の育成こそが数学教育の要であることは、少しでも日本の現状を一端横において虚心坦懐に考えれば、当り前の話であり、「数学教育のための数学教育」、「試験で良い結果をもらうための日常的数学学習」、「上位学校に進学するための手段」にしか目が向かない日本の学校教育の関係者、特に、「保護者」に代表される**わが国の一般国民の「常識」は、国際的に見るとむしろ非常識**なのである。

初等数学は、その普遍的な教育的価値のために、古来より、教育の中心を占めて来た。実際、理学はもちろん、理学ともっとも遠くに見える法学や哲学、あるいは高度な医療や薬学の専門家、あるいは日々の経済活動の選択で決断を迫られる実業界の人にとって、数学的な思考を無視しては、日々の実践が成立しない。「理論はさておき実用的には」という「論理」がまかり通る世界（一部の工学、一部の臨床医療）以外では**数学的な思考（＝綿密で緻密な反省的＋創造的な思考）**の必要性が常識である。崩壊が直前に迫る医療機関では、$triage$と呼ばれる不可逆の判断が即断即決で求められる緊急医療の最前線の日常的な決断を支えるのは、医療現場での多くの経験と知見に裏付けられた、まさにこのような数学的な思考であろう。そして、この傾向は、数学が近代的な手法を手にいれて大衆化した近代以降はより鮮明になっている。

2　数学教育における評価の大前提

数学の成績評価が問題となるときにはまず大いに議論して合意すべきは、このような数学教育の《目的 aim》 と《目標 goal》 である。《何のために教育するのか？》《学習を通じて何が達成できるのか？》が問われてはじめて評価が意味を持つからである。

しかし、この本格的な問題に入る前に、本格的な思索を放棄した自明な間違いを指摘するところから始めよう。

2.1　従来の数学教育における評価

数学において、「１次方程式が正しく解けるようになった」とか「教えた通りの証明がきちんと再現できるようになった」とか「２次３項式の襷掛けの因数分解ができるようになった」とかは、譬えは悪いが、新入社員への「挨拶教育」の成果の評価のようなものであって、その社員にとって生涯の社員生活全体を決定するような重要な評価ではなく、そしてまたそのようなものであるべきでなく（万一、そんなことであったなら、「もうその会社は終っている」といわなければなら

は明らかである。日本の学生は、巷間いわれているように「数学の基本的な計算力はあるが、数学の応用に弱い」のではなく、「基本的な計算がいかなる**意味と意義**を持っているか理解することを教育されていない」ということの自明な結果である！

ない！)、せいぜい、会社への忠誠心や上司からの指示への従順性という《兵卒に対する評価》でしかない。平凡な生徒には手が出ない、という意味で少し「難しい問題」が解けたとしても、その難しさが単なる知識の有無や技術の錬磨の結果でしかないようなものであれば、労働基準法を破っても残業して営業成績を残す《モーレツ社員の利益貢献度》のようなものでしかない。

大きな成長を望む企業のような組織にとって重要な新入社員評価は、敢えて、大袈裟に誇張すれば、いかに苦しい状況にあっても、その中で何らかの独創的な活路を拓くような《知恵＝深い学識と広い教養》と《勇気＝自分の責任で決断を実行する責任感》の有無を判定する本格的な評価であるべきである。

2.2 これからの数学教育における評価のあるべき姿

このような評価を実施する上で第一に重要なことは、評価の対象となる**実績の《目的 aim》と《目標 goal》**を鮮明化することである。

そしてこの評価を実施する上で、第二に重要で、深く留意すべきことは、その評価が外部から表面的に見られたときに、つまり「だれの目から見て」も、同じ評価の結果が導かれるような「安直な客観性」を持つことではなく、**《目的と目標に照らして合理的な評価》**を**知恵と責任感をもって《公正に fairly》実行**することである。

2.3 陥りやすい自明な陥穽

学校での学習者に対する評価は、未来の可能性が文字通り open に開かれている若者に対する評価であるだけに、企業や組織の人事考査以上に《公正さ》が求められる。そして、**評価の安っぽい客観性は、評価の厳正な公正さを決して保証しない**ことに強く留意すべきである。

「点数ではかられる教科内容の理解の達成度」の他に「教科に対する関心、意欲、態度」のような 1 回のペイパー試験の成績では、計れない日常的な学習姿勢の育成度を加味する「総合的な評価」という「斬新な理念」が行政筋から提起されているが、これは扁平なペイパー試験の点数結果での評価という従来からわが国の学校に染み着いた悪弊に対して投ぜられた批判としては、可能的なインパクトを持つものの、実際上は、教員の評価に関わる手間を増やしただけで、空疎に掲げられる言葉だけの「目的」、「目標」の明示化、具体化、実体化の作業を棚上げしたことの必然的な結果として、責任ある公正な評価という最大の目標を曖昧化したという点で、近代日本の教育行政の歴史的な汚点であると私は思う。

3　数学教育＝数学学習の目的と目標

数学教育でもっとも重要なのは、数学的な思索や理解の体験の目的が、古代ギリシャの哲人の言い方を真似れば、若者の《魂を覚醒する》ことであると思う。若者が、《昨日の自分とは違う新しい自分と出会う》ような、言い替えれば、《自分自身の中に眠っていた新しい可能性を目覚めるように発見する》ことではないだろうか。「精神的な成長」という平凡な言葉では、輪郭が惚けてしまって詳細が見えないが、数学を通じてなら、実質に迫ることができる。

数学のすべての単元の教育で、このような《覚醒 awakenings》を具体的かつ多様性をもって構想することが、数学における評価の出発点である。

当然のことながら、覚醒といっても、すぐに「知的な傾眠」「知的な昏睡」に戻ってしまうようなものであることも多い。そして、さらに重要なことは、さらなる覚醒の後では、以前の覚醒は、夢現に過ぎなかったと思うことも少なくないことである。

これ以上の議論は、数学の場合ですら、具体的な単元、具体的な学習場面を想定してやらないと意味が乏しいので、ここでは断念するが、**どんなに初等的なレベルの数学においても、このような覚醒の好機は至るところにある**ことを忘れるべきではない。とはいえ、「覚醒を知らない数学教員」から、「覚醒とは無縁の数学教育」を通じて学習者が受ける数学の評価には、数学的には何の意味もないことも、つねに心に深くおくべきである。

高校から大学への飛躍を学生に誘発する
自己反省型の数学のレポートのシステム

日本大学 文理学部 山浦 義彦

アブストラクト　大学の遠隔講義に関しては, 対面講義の質をオンライン形式でもいかにして維持するか, ということにその議論が集中することが多い. そんな中で「若渓学園での遠隔授業についての取り組み報告」に接する好機を得た. 大学では遠隔という状況下で何ができるだろうか. あるいは, 遠隔講義だからこそできることは何だろうか. そもそも大学初年度の必修専門基礎科目の対面講義では試験の点数による成績評価が通常の形態であり, それこそが学生の講義内容に対する理解を促す唯一無二の方法であろうと確信してきた. そのため, 試験を一切行わずにレポート提出のみで成績管理をする, という講義形態は, 学生の勉強意欲や理解度の向上といった観点からも真っ先に選択肢から除外された. しかし, 遠隔講義を通じて学生の理解レベルを維持しなければならないという, ある種追い詰められた状況で, 「学生自ら仮説を立て」, 事後に解答例を参照しながらそれを「学生自ら振り返って反省する」ことで, 学生の「数学を考える力」をはぐくめる可能性のあるレポートのシステムを思いつくに至った. 本稿はその実践報告である.

目 次

1 はじめに

筆者の勤務する日本大学文理学部の 2020 年度は, 講義の実施方法について何も決まらない状況の中で始まった. 前期開始の 4 月から 1 か月間は, 前期の講義実施方法に関する学部運営方針は何も定まらなかった[1]. 講義が一切開始できない中で, 4 月の月末に「完全遠隔実施」の方針が決まり, 本来の講義開始予定日であった 4 月 10 日に遅れること 1 か月以上の 5 月 15 日から, ようやく遠隔による前期講義が開始された. その時点でもなお, 多くの教員たちが考えたように, 遠隔講義はあくまで「一時的なこと」であるかのように思われた. ところが, 前期半ばの 6 月には「前期を通じての遠隔実施」が確定し, 結局, 前期は「遠隔講義」で終始した. さらに, 後期が始まる直前の 9 月半ばには, 後期を通じて, 実験や体育実技など一部の講義を除いては, 全面的に遠隔での講義実施が決まった. このような中で,「対面でなければ, 学生とのコミュニケーションもうまくとれず, 講義が適正に進められない」と嘆く教員も多くいたが, 嘆いてばかりいても建設的ではない. 何が自分にできるだろうかと模索を始めた. 遠隔を余儀なくされる状況で, 講義方法に関しては二通りの方向性が考えられた. 一つは, 可能な限り対面と同等の講義形態を遠隔という障害を乗り越えて実現しようという方向性であり, もう一つは, 遠隔を逆手に取り全く新しい講義形態を試行してみようという方向性である. 前者の選択をした教員は, 時間割通りにオンラインで双方向授業を行い, 試験も通常と同じくオンラインで実施していた. 一方, 筆者はあえて後者の方向性を選択することを思い立った. この動機づけの発端が, 茗渓学園での新しい取り組みであったことは, 是非, ここに書き添えたい. 大学という教育現場では, 遠隔だからこそ何ができるだろうか? という自問自答を繰り返した. その結果として大学 1 年生向けの数学科必修科目において実践したことを, 平常時の講義内容の概要と合わせてここに報告をさせていただきたい.

本稿で紹介させていただく試みが, 学生の成長にとって良い結果をもたらしたか否か, が明確になるのは, 次年度以降であろうと思われるが, いずれの結果であってもそれを実証するのは大変難しいことのようにも感じる. 教職志望学生が多いこの学科において, 「数学」という教科が試験対策にもとづく「高得点取得のための科目」ではなく「頭を使って考え悩んで理解する科目」であるということを, 将来生徒たちに伝えてみたい, と考える教職志望学生が一人でも増えてくれたならば, 筆者は本稿で紹介する講義形態に「正しい側面もあった」と判断したいと考えている.

[1]筆者は東京大学で非常勤講師をしている. 東京大学ではそのような状況下であっても, 3 月半ば時点で全面オンライン講義という方針が迅速に決定された. 4 月に入る前の 3 月中に, 予め大学によって一括契約された Zoom ライセンスが非常勤講師を含めた全教員に配布され, 4 月はじめにはオンライン講義のノウハウについての教員向け講習会が Zoom で実施された. その結果, 通常に比べてわずか 2 週間遅れの 4 月 20 日から夏学期第 1 回目の講義が開始されたことは, 実に的確な判断に基づく, 特筆に値する手際よさと言えよう.

2 対面講義と遠隔講義

本稿では, 筆者が勤務する日本大学文理学部数学科1年生を対象とする「微分積分学」の遠隔講義の方法を平常時の講義内容と共に紹介する. この科目は「微分積分学1」「微分積分学2」という名の半期2科目に分かれており, それぞれ, 演習1コマ付きで週に90分 × 2コマが割り当てられてられている.

2.1 従来の対面式講義の実施方法

(1) 基本方針

学生たちには, 講義内容を記した「講義ノート」(170ページ程度, 簡易製本) を実費価格で予め購入してもらっている. 重要な箇所や特に留意してほしいポイント個所は空欄にしてある. 講義では, 板書を必要最低限に抑えた内容説明を行う. 学生はその解説を聴きながら空欄を埋めたり, 口頭説明で重要と感じたことを余白にどんどん筆記する. そして, 空欄が埋められた講義ノートは復習用としてしっかり読み通せるようにしてある. この形態で講義をするようになって15年ほどが経過する. 以前は, 講義ノートに書いてある内容のすべてを板書していたが, 年々, 学生の書写にかかる時間が無視できなくなっていった. そのため教える側は, 学生が考える間をとるのではなく, 黒板を写す間を講義の随所にとる必要に迫られた. さらには, ノートに書写するだけで満足し, 講義中は実質的に頭を使っていないという学生も多くいることが分かった. そこで, すべての内容をプリントにして, それを見ながら解説講義をしてみたこともあった. すると, 今度はそのスピードについていけずに講義途中でドロップアウトしてしまう学生が続出した. スピードをうまく調整し, ノートをとるという満足感を持ってもらい, かつ, 学生がその場で可能な限り頭を使って講義に臨める方法はないだろうか, と考えた末に, 現行の「空欄付き講義ノート」の形態にたどり着いた. 空欄の箇所では, 場合によっては答えを与える前に各自考える時間を与えることで, 講義内容から完全に脱落する学生を極力減らす効果を期待している. 一方で, この講義方法で解決できない点もあることは白状しなければならない. 講義を聴いていて重要だと思ったことを余白にどんどん書き込むようにと常々指示を与えているが, 空欄がない場所では安心して実質的に何も聴いていない学生が少なからず見受けられのである. この難点については筆者自身完全な解決策を得てはいない. 大学入学前に長年に渡り板書を丁寧に “そのまま書写する” という授業を受け続けてきた学生たちにとって[2], 黒板に

[2]教育実習で担当教諭から板書について次のことを鉄則として徹底的に教え込まれた, ということを学生から聴いたことがある.「そのまま寸分違わず答案として記せば満点になるような “模範” となる書式で板書しなければならない」とのことである. このようなような “形式” を優先するような教育を行えば, 生徒たちは本来の数学的な内容理解はさておき, 必死に「書式」を暗記するようになるだろう. 自学において, 教師から説明された内容を “自分の言葉に直して” ノートに書き下してみることにより, 受け身で説明を聴いた段階では鵜呑みにしていた多くのことに素朴な疑問が浮かび, それを自力で解決することで理解が深まるということは多い. 板書の書式こそが「模範」であり, それ以外の記述は減点対象になることがある, という教育は, 生徒たちから理解を深めるチャンスを奪ってしまうことになるのではないだろうか.

書かれていない行間を話を聴きながら速記で書き留めることは, ことのほか難しいようである.

講義ノートを用いた解説はなるべく60分を超えないようにしている. それが, 大学1年生にとって, 集中力を持続できる限界時間であることが分かってきたからである. 60分を超える場合は適宜, 自分で考える時間をはさむように工夫している.

講義内容の解説が終わった後は, やはり予め購入してもらっている簡易製本版の「演習書」(1030ページ程度) で講義に対応する箇所を各自自習する. この演習書には, 微分積分学を通じて使われる用語や記号の解説部分, 上巻 (微分積分学 1), 下巻 (微分積分学 2), 演習問題の解答集という四分冊の簡易製本になっており, 学生たちの「自学」のために作られた冊子である. 講義時間内に演習書で解くべき演習問題を指定し, 各自自習をさせる. その際に学生たちの質問を聞いて回り, そこから「多くの学生がもつ疑問点」を読み取り, クラス全体に向けて黒板を使って適宜解説を加える, ということを残りの120分間で行う. さらに, 計算演習の位置づけで, 補助的な話題をいくつか解説する. 数学的な内容は以下の通りである:

講義内容

[微分積分学 **1**]「解析学の大事件」と位置付けられる Fourier による熱伝導方程式の研究の紹介[3].

[微分積分学 **2**] イプシロン–デルタ論法による実数論[4]

補助的な話題

[微分積分学 **1**]

- 対応と関数
- 集合の取り扱いと命題の否定
- 数学的帰納法
- 1変数関数の平均値定理

[微分積分学 **2**]

- 逆三角関数
- 1変数関数の Lagrange 剰余項つきテイラー展開
- 1変数関数の合成関数微分法則と置換積分法

[3]長岡亮介先生の御著書「関数とは何か」(岡本久・長岡亮介著, 近代科学社) [1] によれば, Fourier 自身の計算は現代から見ればあいまい, あるいは, 遠回りな議論をしている部分も多いようである. そのオリジナルを紹介することは, 恥ずかしながら原著を読んだことのない筆者には到底出来ないため, 適宜, 受講生が慣れ親しんできた数学 III の範囲内の言葉を用いて説明をしている.

[4]この科目で目指すのは, 変分学において最も重要な存在定理の証明原理をすべて含んでいる「連続関数の最大値, 最小値の存在定理」の証明である. この証明の解説のために, 半期すべての時間を費やす.

通常のいわゆる大学 1 年生向けの「微分積分学」の講義内容と比較すると, 単元という観点から見ればかなり内容が少ないが, 試験で点数をとることに慣れてきた大学 1 年生に, 本来の数学とは何か, ということを考えてもらいたい, という気持ちから構成した内容である. 教える以上は必要な深さで原理まで教えたい. そして, 計算方法だけを先取りして教え, 計算練習の反復により「分かった気にさせる」講義とは一線を画したい, という意図に基づいている[5].

(2) 成績評価方法

講義ごとに提出される「出席レポート」と「復習成果レポート」, および, 半期それぞれに 3 回ずつ実施する定期試験の合計点で前期, 後期それぞれの科目の成績をつけている. なお, 定期試験に関しては学生の勉強を促す目的で簡易製本「過去 3 年間の過去問題集」をやはり購入してもらっている. そこには, 模範解答および, 採点後のコメントとして, 学生が勘違いしやすいポイントや数学的内容について詳細に記してあり, 試験対策中心の勉強でも, 可能な限り数学本来の内容を考えてもらえるよう工夫をしている (つもりである).

2.2 遠隔での講義方法

(1) 全体像

既に述べた「平常時の講義方法」では, 薄々感じながらも自ら「蓋」をしていた問題点もある. 試験で一定以上の点数を取らなければ, 履修単位を取得することができない, という重圧から, ほとんどの学生たちは, 講義の内容自体の理解よりも試験対策に力点を置くようになった. その結果, 詳細解答つきの演習書を勉強することなく, いきなり過去問題集で問題解法ノウハウを見様見まねで学びだす. その気持ちはわからないではない. ここだけの話ではあるが, 私も研究費倫理に関する文科省のオンライン試験で合格をとることは完全に「やっつけ仕事」になり, 説明書を熟読する前にとにかく試験を受けてみてその経験で得た表面的な知識をつなぎ合わせて, なんとか合格点をとる, ということをしている. 要するにその場しのぎ以外のなにものでもない. 研究すること自体が目的なのだから, このようなことに多大な時間を費やしたくないという気持ちが強いからである. 一方の学生たちは「勉強」することが目的なのだから, そのようなその場しのぎの勉強方法は筋違いであるという観は否めないが, 手っ取り早く単位を取得したいという気持ちから, 数学で悩むのではなく問題解答ノウハウの習得に時間を使うのであろう. その結果, 多くの学生が試験が終われば講義の内容のほとんどを忘れてしまうという実情があった. たとえば, 解

[5]少し余談になるが,「なるべく広く浅く様々な数学の概念や言葉を教え, まずは学生たちに " 聴いたことがある " という状態を作ることが大切である」と考える大学教員も多い. しかし, 私はそのようには考えていない. 何故なら, 学生たちは聴いたことがある, あるいは, 練習問題が解ける程度の理解でも, 分かった気になってしまうことが多い. その結果, 本格的な説明をしても「もう知っていることだから」「論理など知らなくても問題は解ける」とたかをくくり, 本気で理解しようとしなくなる傾向があるからである. それならば, 少ない項目で良いから, 先入観を持つことなくしっかりと一つずつ着実に学んでもらった方が良いと感じている.

析学において最も重要な定理の1つであると考えられる, Bolzano-Weierstrass のコンパクト性定理も, 3年次に少人数のゼミに所属になるころには, どうにか覚えている学生にとってさえ, それは単なる思い出になっており, 定理の主張, 背景や意義を説明できる学生はまずいない. それでも, 試験前だけでも試験に向け必死に数学に向かい合ってくれれば良い, と考えて長年に渡りこの講義方式を続けてきた. しかし, TECUM において, 中学校, 高等学校での教育の議論に接し, それをわが身のこととして大学教育に置き換えて考えているうちに, 大学における教育に対しても疑問に思うことが増えてきていた. まさに, このタイミングで「遠隔講義」を余儀なくされたのである. そこで, これを機に, レポート課題のみによる採点という方法を試してみようと思い立った. 学生たちにはある程度以上しっかりしたレポートを提出すれば, 履修単位を保証することをあえて予め予告した. 意味も分からず他人のレポートを写すということを, 教える側は全く望んでいないことを明確にしたかったからである. なお, この試みの根幹には, 長岡亮介先生をはじめとする, 磯山健太先生, 新妻翔先生, 谷田部篤雄先生の茗渓学園におけるオンライン授業における「自学」の重要性という意識改革からの多大な影響があったことを言い添えておきたい.

講義形式は講義内容の解説をヴィデオで製作して提示するオンデマンド形式とした. ヴィデオは, 理解が困難な箇所を何度でも繰り返し見返すことができる. 対面式講義では, 一回聞き逃してしまうと, それで終わりであることに比べると, 対面講義の場合と同じ内容を解説するオンデマンドヴィデオの方が, やる気のある学生にとってはありがたいものではないか, との考えからである. 実際, 一部の学生たちからは, 分かるまで見返した, という報告ももらった. ただし, このヴィデオ製作には, 不慣れのためもあり, 多大な時間がかかった. 空欄についても, 始めは空欄のままで提示し, 次に赤字で解答をいれるという形式にするのが理想であろう. しかし, そこまでは手が回らず, 予め赤字で答えを入れておき, それに基づいて, (Zoom) + (iPad) + (電子ペン) を使ってヴィデオ製作を行った.

オンデマンドによる講義解説ヴィデオの視聴を前提として, 対面講義の「定期試験」に代わるものとして, 学生たちには半期に2回ずつのレポート課題に取り組ませることにした. それを通じて, 学生たちには以下のことを経験してほしいと考えた:

- 問題解法のノウハウの習得ではなく, 数学本来の内容の熟考
- 他人との相談ではなく, 自分一人で数学を組み立ててみるという試行
- 内容理解に対する仮説を立て, それに基づく議論の遂行
- 自分の思考になかったこと, 足りなかったことに対する自らの納得

練習問題を見て, 解けなければすぐに「模範解答」の解法を見て,「そういうものだからそれ以上考えても仕方ない」と自分を納得させる, という勉強方法をとってきた学生たちに, もっと自分の立てた仮説を大切にし, それに基づいてとことん考え抜いてほしいということである. そして行き詰ったら自らの仮説を立て直し, また議論をし直してみる. そのような体験を是非してほしいと考えたのである. そこで, 学生たちにこれを実現させるためのレポート課題を出すことにした. 具体的な課題設定の方針は次の3本柱からなる:

(1) 講義の発展的内容を出題する

過去問を見ても出ていないような高レベルの問題に接することにより, 講義の内容を講義ノート, 演習書をじっくり復習するようになることが期待される. この目的のため, すぐに解けるような練習問題は避け, 腰を据えて考えなければ容易に解決できないレベルの問題にした. これは, 平常時の定期試験では到底出題できないレベルの, 思考に時間のかかる問題である.

(2) 専門書を自力で読み進めるという経験をさせる

大学 1 年生は小学校のころから長年に渡り「試験勉強」に慣れてきている. そういう学生たちは「自分の力で数学書を読み, 内容を理解する」とはどういうことか, すらわかっていないことが多い. 一方, いわゆる " 専門書 " は実に無情である. 理解できなければ読者の側に責任である, という体で記述されていることが多いからである. しかし, それを理解しようという必死の努力が数学的な深い理解につながることが多い. そこで, 何かを調べて「鵜呑み」にするのではなく, 専門書に書かれてあること以外はいかなるヒントも与えられることなく, その内容をフォローし, 理解するという経験をしてもらおうと考えた.

なお, レポート作成要領として,「他者との相談」「ウェブサイト閲覧」「SNS への質問投稿」を不正行為として, 厳格に禁止した. 学科の中には, 学生同士で話し合って解決したり, 自分にとってわかりやすいと感じる説明に出会えるまで複数の教員に聞いて回り, そのうち理解できればよい, という見解をもつ教員もいる. しかし, 私はそれらは自分自身でため息が出るくらいとことん考え抜いた後にすべきことであると考えている. 自分の中での理解に対する「仮説」が全くない状態で他人の考えを聴いたり, 少しずつ異なる説明を聴いても, 表層的理解しか得られないだろうし, 何より本人のためにならない. 自分の中で仮説を立て, 失敗し, また仮説をたてなおす... と, とことん考え抜いた後に他人と議論をすれば, 心から理解できると考える.

(3) 高等学校の数学との関連付け

本学では, 大学 1 年生の時点では, 9 割を超える学生が「教職志望」である. 漠然とではあるが「より進んだ数学を理解した上で教師になりたい」という積極的な意欲をもって入学してくる. しかし, 大学数学と高校数学の乖離や, 難解さによる理解困難が原因となり, 徐々に専門数学の勉強に取り組むことに消極的になり, 入学後 2 ヶ月も経つと,「大学の数学は難しく, 高等学校で教える内容とは " 一切無関係 " だから, 教員免許取得のために単位さえ取れればそれで十分である」という " 大義名分 " を掲げ, 専門数学の勉強に熱心に取り組まなくなる. そして, その程度の意識で将来教壇に立つことになる. このことを裏付ける根拠がある. 本学科では, 教職志望学生のために実際の教育現場で働く身近な存在である卒業生に話を聴く, という催しを年に数回開催している. 「大学で学んだ数学を教育現場でどのように活かしているか?」という教職志望の在学生からの質問に, 現役教師である卒業生たちはほぼ異口同音に「大学数学はあくまで別物であり, 教育現場では無用の長物である」という主旨の返答をする. 大学生たちの " 大義名分 " は現場教師のこの

発言が強固な後ろ盾となり, もはやなんぴとからの批判も寄せ付けない“ 錦の御旗 ” に昇華する. まさに,「教員養成の負のスパイラル」と言わずにはいられない.

数学の教育は決してそうではなく, 中学校, 高等学校の数学を教えるためにも, 少なくとも教える側は専門数学までの知識を持っていなければならないし, それを踏まえた説明が必要である, ということをこの課題を通じて大学 1 年生の段階で強く認識させることを目指した.

(2) 実践方法

数学の問題を提示し, それを各自解いて提出するという点では通常の「レポート」と全く同じである. これまで筆者がこのようなレポートによる採点を行ったことは一度もなかった. その理由は次の通りである:

(P1) 少し考えて問題が解けないと, じっくり考え抜くことをせず, 他人からや SNS を通じて得た知識を単に丸写しする学生が現われる.

(P2) 各自のこれまでの勉強で得た知識の範囲でどのくらい自力で考え抜いたのか, をレポートから読み取ることは極めて困難である.

(P3) レポート提出後に, 問題の解答例を提示しても, それを基にして勉強し直す学生は稀である.

(P3) については, 平常講義の試験でも同じである. 試験後には必ず詳細解答および, 問題についての詳細コメントを配布している. もちろん, 十分注意して作成するが, どうしても, 修正しきれないタイポも多く含まれる. しかし, 原稿が「過去問題集」として簡易製本化され, 次年度の当該試験実施直前に次年度の学生から指摘されるまで, タイポが指摘されることは, 最後の答えの数値のタイポ以外, ほぼ皆無と言ってよい. つまりこれは, 試験後に解答を真剣に読む学生はほとんどいないことを意味している.

さらに, 遠隔という講義形態から次の「レポート課題」に対する否定的な事項が加わった:

(P4) 公平性の問題から, 試験を一切実施できなかった. このため, 成績評価をレポートのみから判定しなければならない.

(P5) 本学で採用されている学習管理システム (Learning Management System) では, 提出されたレポートに, 数学的なコメントを詳細に書き込むことができない.

以上の問題点を克服するために, 次のように 1 つの課題集 (3,4 題程度) に対して“ 二度にわたる ” レポート提出を求めることを思いついた:

(第 1 回目の課題) 問題提示: 講義解説および演習書をもとにして, まずは自分の力だけで解いてみる (作成期間: 1 か月程度).

(第 2 回目の課題) 解答例提示: 解答例を基として自分の「理解」を分析する (作成期間: 3 週間程度).

学生は, 最初の課題として1か月程度の時間をかけて, まずは自分の力だけに頼って問題に取り組む. レポート提出期限後に詳細な解答例を提示する. 学生たちはその解答例を参考にして提出したレポートでの自分の仮説をすべて詳細に検証する. そして, 不足していた点や勘違いしていた点を自ら考察する. 実質的に二度目のレポートが今回の実践における肝である. そのため, あえて一度目に提出されたレポートでは, 筆者は試験答案のような「マル・バツ」の採点やコメント付記は行わない. あくまで, 考え抜いて作成した後に, 解答例を自分の力で「読んで」, 自分の力で「考察する」ことで, 様々なことに気づくチャンスを与えたいからである.

1回目のレポートで, 正しい論理の下に正しい結論が導かれていればそれが最善である. しかし, 結論が導けなかったり, 理解できなかったりしたとしても, 苦労して取り組めば必ずそれがレポートの記述に現れるはずである. 数学の答えはただ一つかもしれないが, 思考の過程は十人十色であることを学生たちに予め強調しておく. そして, 2回目のレポートの考察は1回目の自身のレポートでの思考が基になるため, 他人のレポートを写すという行為は全くの無意味であり, 自分自身にしか書けないはずである. 以上の理由からか, 多くの学生が自分の力で考え抜いて, レポートを作成してくれたように感じる[6]. なお, 学生たちには予め, 最低限きちんと書かれたレポートを提出すれば, 単位を保証することをアナウンスした. 正解を書かなければレポート点数がとれない, となれば, 他人のレポートを写すなどの手段に出がちである. そうなれば, 解法を暗記する試験形式の講義と同じことになり, 元の木阿弥である. 解けなくても, 解いたときの苦労を詳細に書けばよい, と言われれば, 自分の頭を使って少しでも考えるきっかけをもってくれるだろうと考えた. なお, レポート採点には主観が入ることは避けられず, 点数に関する相談には応じることができないことも前もって学生たちには断った.

以下に実際に学生たちに提示した採点基準を, 第1回目と第2回目のそれぞれについて転記する:

[第**1**回目レポート課題に対する採点基準]

レポートは, 次の観点から, A(100点), B(80点), C(60点) (カッコ内はおよその点数) の判定を行います (ほとんど白紙, 未提出の場合はこれ以下になりますのでご注意ください).

- いかに丁寧に書かれているか (文字自体の綺麗さは基準にしませんが, 丁寧さは基準に入ります. “殴り書き”のようなレポートは必然的に点数が下がります. 読み手が「読みやすい」と感じる仕上げにしてください. 分かりやすい例を言えば, 皆さん大学入学手続きの書類を書くときには少なくとも「丁寧に」書いたはずです. レポートは基本的に丁寧に記述することが基本です).

- どれだけ自力で考え抜いたか (解けない, あるいは, 正解ではないということで低く

[6]平常時は, 大学1年生は対面講義その他を通じて学生同士の「友達関係」を構築するが, 遠隔講義ではほぼそれが出来ていなかったようである (この点については大変気の毒である). 学生たちがレポートを自分の力で考えて作成したことは, このことも要因の一つではないかとも考えられる. 次年度は少しずつ対面講義も増えてくるようである. 本講義では次年度も本稿の方法を継続し, 比較検討したいと考えている.

評価することはしません. その場合でも, どこまで考え, どこで躓き, おおよそこのように考えた, ということを丁寧に記してください. 正解であっても無味乾燥な解答のみだったり, 何も書かないで空白であったり,「わからない」の一言であったりすると評価は極めて低くなります).

- 文章は他人に通じる文章になっているか (当然ですが, 正しい日本語を書いてください).
- グラフ, 概念図を描く, その他独自の工夫により解説や説明を試みているか (問題が解けた場合も解けなかった場合も, どうすれば他人に自分の思考が伝わるか, ということを強く意識して書いてください).

【備考】答えが正解であるに越したことはありませんが, 通常の試験と異なり, 正解でなくてもそこに至るまでの苦労や努力を採点したいと思っています. 他人から教わってそのまま写しておしまい (これはそもそも不正行為に該当しますが), ということは本人の勉強にもなりませんし, 解答は 1 つですが, その解説方法は学生によって十人十色のはずですので, 自分で考えたのかどうかはすぐにわかります. 自分のオリジナルのレポートにすることを強く意識して作成してください. □

[第 **2** 回目レポート課題に対する採点基準]

以下を基準に採点を行います.

- 「答え合わせ」の「マルバツ」だけで満足していないか? (どれだけ「正解」していたか, を見るつもりはありません. どれだけ自身の過去の思考に対する深い考察を行ったか, を拝見しそれを評価します. 従って, (正解率) = (高評価) ではありません.)
- 解けなかった問題について, 解答例の丸写しで満足していないか? (途中までしか解けなかった, あるいは, 全く解けなかった, ということには必ずその原因があるはずです. 問題中に使われている概念の定義自体の理解があいまいなだった, ということもあるでしょうし, 考える方向性を誤っていたということもあるでしょう. まさにその理由は十人十色です. 一人一人自分の第 1 回目のレポートを作成した時のことを思い出しながら, なるべく詳細に解けなかった理由を分析をしてみてください.)
- 正解した問題も, 解答例を読んで " 自分の言葉を使って " 書き下し, 詳細まで自分の理解を確認しているか? (数学の問題は正解できたとしても, よく考えてみると, 言われた通りのルーチンワークによって解けていただけ, ということが往々にしてあり得ます. 本来の「問題解き直し」とは, 解けたけれどあいまいな部分や, どうしてこのような解法になるのだろうか, ということまで深く考察をした上で, 全面的に「自分の言葉に直して」書き下してみる, というのが姿勢のことを言います.)

- 問題解法中で使われる数学の公式についても「興味」を持ち, 証明を見直すなどをしているか? (公式自体の意味を深く理解せずに, それらをつなぎ合わせて解けた, という場合は, 数学はまるでパズルを解いているようになってしまいます. 使われている公式自体の意味をもう一度考えながら問題全体を見渡す必要があります.)
- 何も見ないでその問題を他人に解説できるか? (これは, なかなか難しいことですが, そのくらいの緊張感をもって作成しているか? を拝見します.)
- 全体的に丁寧に仕上げているか? (一回目の課題提示の際に書いたことにも通じますが, じっくり取り組んだレポートには必然的に丁寧さがにじみ出てくるものです. 綺麗な字で書ければそれに越したことはありませんが, 綺麗でなくても丁寧な字で, 読み手に分かりやすいように工夫して書いてください.)

【備考】 細かい点数の値についての問い合わせには申し訳ありませんが応じられません. なお, 数学を「心から理解する」ということは, とても難しいことです. レポート課題を提出したらすべて終わりだ, という意識では, 数学を心から理解することは決してできないでしょう. レポート提出後も, ああでもない, こうでもない, と悩み続けてください. □

(3) 実績と反省

以上の講義方法により, 学生たちからの反応に関して例年と比較して大きく変化したことがある. それは, 学生からの数学に関する質問内容である. 例年は「このように書けば試験では正解になりますか?」という類の試験に関する内容や, 「問題解法ノウハウ」に関する質問がほとんどであった. 学生たちは, 証明の詳細な内容を直接問う問題が試験で出題されることはほとんどない, ということを過去問から「学習」し, 定理の証明の理解を勉強内容から外してしまうのである. ところが, 今年度の学生からは, 問題解法に関する質問は, (試験は実施しないとアナウンスをしていたのだから当然ではあるが) 皆無であり, 質問内容は講義内容に関する素朴な疑問や, 演習書に記載した定理の証明内容について「何故このような方法で証明をしているのか」といった数学本来の質問ばかりであった. この変化が筆者の単なる「気のせい」でないことは, 作成以来, 一切指摘されでこなかった演習書に記した定理の証明の細かいタイポの指摘が多く寄せられたことからも裏付けられた. これは予想外の展開であった.「試験で一定以上の点数を取らなければ合格できない」という縛りから解放され, 本来の「専門数学を学びたい」という意欲をもった学生たちの存在が明らかになったことは, 筆者にとって大きな収穫であった.

また, 学生たちは高等学校までの「予備知識」の不足により, 問題を解くことを最初から放棄してしまうことが多い. 今回のレポートでは講義で説明した事, あるいは, 課題の中に書かれてあることのみから自分で組み立ててみなさい, という課題にしたことが功を奏したのか, 意外なことに学生たちは一生懸命に頑張って考えてくれた.

恐らく例年の学生たちと現時点で同じ試験をすれば, 試験対策をしていない分, その点数差は火を見るよりも明らかであろうと思われる. しかし, 真の意味で「数学を理解する」

という経験させることができた, という試験の点数には変えられない大切なことを学生たちに伝えることができたと考えている.

一方で, これまで長年に渡り「数学は答案のマルかバツがすべてである」ということを学校教育を通じて刷り込まれてきた学生にとって, 自力で仮説を立てて考え, それを自ら検証するということは容易なことではなかったようである. どのようにすればよいかわからず, 解答提示後のレポートでも, 模範解答をただ丸写しするのが精一杯である, という学生も少なからずいたことは事実である.

3 最後に

例年は, 試験結果から実に 3 割以上の学生が当該科目の単位を取得することができず, 再履修クラスで次の半期に同じ科目を再受講することになっている. しかし, 今回はレポートを提出することを単位取得の条件としたため, 単位を取得できなかった学生は, 自らの事情でレポート提出を放棄したほんの数名だけであった. このようなことは, 遠隔講義を余儀なくされる今般の状況がなければ, 他教員から強い批判を受けていたことであろう. 実際, 試験成績では到底合格できない学生が例年 3 割程度はいる. そのような学生たちにレポート提出だけで合格を与えることは, 教育上甘すぎるのではないか, という指摘が予想される.

一発勝負の試験において数学的内容の真の理解を問う問題を多くすれば, それに応じて, 単位を取得できない学生の割合も増加する, というジレンマがある. このため, 正直に告白すれば試験結果で合否を決める場合は, 解法さえ習得すれば正解できる, いわゆる「パターン問題」だけでも合格最低点を超えるように出題内容を綿密に調整せざるを得ない. そのような試験でどうにか合格をする, あるいは合格できない学生たちに, 数学の深い理解に接近する勉強を期待することは, ほぼできないだろうことを, 辛いところではあるが筆者は認識している. ならば, 一定期間レポート課題を自力で悩み考え, 間違っていたり, 拙い考えでも良いから自分の考えを提示し, それに基づいて議論を進めてみる. そして, そののちに詳細な解答例をやはり自力で理解して足りなかった視点や考察を補うという経験を, その深さにおいて個人差はあるだろうが, 大学 1 年生で経験することには意義があるのではないかと考える.

今回のレポートにより, 一部の学生たちからは「数学は練習問題を解いてマルをもらうことを目指す科目だ」という認識から「頭を使って自分で考える学問だ」という認識へと大きく変化したという感想をもらった. 試験中心の対面講義では, このような感想が聴かれることはほとんどなかった. このことだけでも試験中心の講義からレポート中心の講義にした意義はあったと感じている. 受講生の中で一番良い反応を示してくれた学生の感想レポートを, 本人の了解の下に以下に紹介させていただきたい:

[ある学生の感想レポート] [7] (原文のまま)

この講義を受講する前 (大学入学時) は正直言って, 私は数学を侮っていました. 大学数学を高校数学と同じように考えていた私は, 微分積分学の最初の講義で登場した関数列 (各点収束や一様収束の定義など) の時点で早くも少し心がくじけそうになりました. しかしながら初めから大学数学に触れることによって, 大学数学と高校数学の違いに気づき,「数学」という学問を本当の意味で知ることができたと考えます. 今思うと最初の講義で山浦先生に「数学は心から理解をすることが大切だ！」と教えていただき, 本当に良かったと思います. 微分積分学 1 · 2 の講義を受講し, 関数自体の定義や関数の連続性, 数列の収束性などを学ぶたびに, 高校数学がいかに曖昧なものであったかを思い知りました. それと同時に今まで曖昧であったものが明確に定義され, 本来の意味を知ることができるので, どん底にいながらも楽しいという気持ちがありました. 私が考えるに, これが数学の楽しさ · 面白さの 1 つなのではないかと考えます. 私が小学生 · 中学生の頃は「数学 = 計算」と考えていて, 必ず答えが 1 つに定まることに楽しさを感じていました. 数学を面白いと感じる理由に関しては人それぞれで良いと思うのですが, 数学の教師を目指す人間からすると, 少しでも生徒が本物の数学に触れる機会を作り, そこで本当の面白さを感じてほしいと考えます. 現在の私の現状は, このような数学の教師にはまだほど遠く, 微分積分学全ての内容を人に熱弁できる程の自信もない状態です. 微分積分学の講義自体は終わってしまいましたが, 微分積分学の学習は続け, 1 つ 1 つの魅力を熱弁できるような状態に到達することを目標とします.

[7] 遠隔授業で戸惑っているであろう大学 1 年生に, 長岡亮介先生のご了解を得て, 御著書「君たちは, 数学で何を学ぶべきか」[3] 125 ページの「1. 数学の場合, 学ぶということは」を, 書籍名を添えて学習管理システムに原文のまま掲示させていただいたことがある. この学生は, そのあと, この書籍を早速購入した, と報告をしてきた学生の一人である.

4 レポート課題の一例紹介

以下に, 実際に出したレポート課題問題を紹介したい. それぞれ, 前節で述べた 3 本柱に沿った問題を記述してみたい.

4.1 (1) 講義の内容からの発展的内容を出題する

前提として, 講義では上限 (sup) については定義や性質を一通り述べてある. 例年の試験では, 実数の集合の上限を求めてそれを証明する, という出題に終始していた. 一方で, 学生たちは上限の実際の応用の場面では上限を使いこなせないことが多い. そこで, 実数の集合を明示的に与えるのではなく, 自分で考えるべき「実数の集合」を設定し, 上限であることを証明する問題として次を与えた.

[課題]

(i) 平面上に点 O を中心とする半径 R (>0) の円 $\overline{D}$ がある. ただし, $\overline{D}$ は円の内部および, 円周上の点をすべて含むものとする. 平面上の 2 点 P, Q に対して PQ を P と Q を端点とする線分の長さと定義する. なお, P=Q のときは PQ$=0$ と定める.

実数からなる集合 A を

$$A = \left\{ \mathrm{PQ} \;\middle|\; \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \overline{D} \right\}$$

とするとき, $\max A = 2R$ であることを証明しなさい.

(ii) 平面上に点 O を中心とする半径 R (>0) の円 D がある. ただし, D は円内部の点だけで, 円周上の点は一切含まないものとする. 平面上の 2 点 P, Q に対して PQ を P と Q を端点とする線分の長さと定義する. なお, P=Q のときは PQ$=0$ と定める.

実数からなる集合 A を

$$A = \left\{ \mathrm{PQ} \;\middle|\; \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D \right\}$$

とするとき, $\sup A = 2R$ であることを証明しなさい.

[補足] 以上の問題を, (a) ユークリッド幾何学, (b) 解析幾何学の両方で証明しなさい. なお, ユークリッド幾何学とは x 軸, y 軸の無い平面を考える幾何学のことであり, 中学校のときに学んだ平行, 錯角, 同位角, 三角形の相似, 合同... などの議論は通常この範囲で考えられていました. また, 高等学校のベクトルも三角形の辺の内分点云々という議論はユークリッド幾何学です. 一方, 解析幾何学とは高等学校で学んだ「xy 座標平面」上での議論のことであり, O $(0,0)$ を原点として, 点を座標で表し, (i) の円の領域を $x^2+y^2 \leqq R$ のように不等式で表したり, 直線を方程式 $y = ax + b$ (a, b は定数) のように式で表現する議論です. また, ベクトルを成分表示を用いて考えていたのは解析幾何学での議論になります.

(注意) 証明中の議論では, 見た目の直観による " 短い ", " 長い " という議論は避け, 厳密に議論してください.

4.2 (2) 専門書を自力で読み進めるという経験をする

この課題は「専門書を自力で読む」ことによって数学を理解することの大切さを実感させるための課題である. 専門書[8]の最初の 2 ページに書かれてあることを題材とした. そのため, 予備知識は一切不要になっている. 逆に言えば, この問題が解けないことは読み手の責任になる. その意味で少しシビアな課題である.

[課題] 下の“ 四則演算 ”を熟読し, 次の“ 問 1 ”について証明を自分で考え, それを高校生が分かるように書き下してください.

[Page 2, 問 1]

(i) (R3) を満たす 0 はただ一つ.

(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して (R4) をみたす $-a$ はただ一つ.

(iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $-(-a) = a$

(iv) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $0a = 0$

(v) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $(-1)a = -a$

(vi) $(-1)(-1) = 1$

(vii) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

(viii) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(-a)(-b) = ab$

(ix) $ab = 0$ ならば $a = 0$ と $b = 0$ の少なくとも一方が成り立つ.

(x) 任意の $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ に対して $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(xi) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ に対して $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

四則演算

$\mathbb{R}$ の任意の二つの元 a, b に対し, その和 $a + b$, 積 ab と呼ばれる実数が定義され, 次の (R1) から (R10) までの条件をみたす.

(R1) $a + b = b + a$. (和の交換律)

(R2) $(a + b) + c = a + (b + c)$. (和の結合律)

(R3) $\mathbb{R}$ の元 0 が存在して, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して $a + 0 = a$ をみたす. (0 の存在)

(R4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $-a \in \mathbb{R}$ が存在して, $a + (-a) = 0$ をみたす. ($-a$ の存在)

[8]杉浦光夫著「解析入門 I」(東京大学出版会)

(R5) $ab = ba$. (積の交換律)

(R6) $(ab)c = a(bc)$. (積の結合律)

(R7) $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$. (分配律)

(R8) $\mathbb{R}$ の元 1 が存在して, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して $a1 = a$ をみたす. (1 の存在)

(R9) 0 でない任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $a^{-1} \in \mathbb{R}$ が存在して, $aa^{-1} = 1$ となる. (逆元の存在)

(R10) $1 \neq 0$. (0 以外の元の存在)

$a + (-b)$ は $a - b$ と記し, a と b の差という. また, ab^{-1} は a/b, $\frac{a}{b}$, $a \div b$ などと記し, a の b による商という. 和, 差, 積, 商を作る演算をそれぞれ加法, 減法, 乗法, 除法という.

[補足 **1**] 実数に関する性質 (P) があるとき, (P) を満たす実数が「ただ 1 つであること」(一意性) の定義は, 次の通りです:

[定義] (一意性) 2 つの実数 a, a' がどちらも性質 (P) を満たすならば, $a = a'$ である.

少し独特な気持ちを持つかもしれませんが, これが数学における一意性の「定義」になります. 従って,「唯一つ (ただひとつ)」であることを証明しなさい, と言われたらこの定義に基づいて証明することを意味します.

[補足 **2**] 設問 (x) を証明するためには, 逆元の一意性が必要になります. それを (x′) として設問に加えます. (x) の前にこれを証明してください.

(x′) 任意の $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ に対して (R9) を満たす a^{-1} は一意的である.

[補足 **3**] 恐らく問題を解こうと思った瞬間「え? 全部, 極めて当たり前のことじゃないのかな!」と思うかもしれません. しかし, 少なくとも負の数を初めて知った中学生には当たり前のことではなく, れっきとして教わることです. どのように当たり前ではないのか? いわゆる公理 (R1)-(R10) のみを使ってそれらを数学的に厳密に証明してください, という課題になります. 自分が当たり前だと思っている知識や他の文献に書かれてある定理などを勝手に使うことは一切, 許されません. (R1)-(R10) とそれらを使って自分が証明した事実のみを使って証明してください. 逆に, それ以外で必要となる「定理」などは一切ありません. この課題を通じて, 自分がなんとなくもっている「当たり前」という感覚の数学的知識がいかに危ういものであるか, を強く認識してほしいと思います.

4.3 (3) 高等学校の数学との関連付け

この課題は, 高等学校の「数学 III」を教えるために, 現在学んでいるイプシロン–デルタ論法が無用の長物ではなく, 最後には自分自身が自信をもって納得するための不可欠な道具である, ということを学生に認識させるための課題である. なお, この課題についてのみは, 学生に提示した私の拙い解答例を転記する.

[課題] 以下の, とある検定教科書「数学 III」における「関数の極大･極小」に関連する議論の流れを読み, その後に記した【レポート課題】に取り組みなさい. なお, 教科書には, 定義, 定理などの区別がないので, 分かりやすさのためそれを併記した. また, 証明は要点のみの抜粋とした.

検定教科書の記述

[0] [定理 **0**] 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で, 開区間 (a,b) で微分可能であるとする.

1. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)>0$ ならば, $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で単調に増加する.
2. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)<0$ ならば, $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で単調に減少する.
3. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)=0$ ならば, $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定数である.

(1 の証明) 閉区間 $[a,b]$ において $a \leqq u < v \leqq b$ を満たす任意の 2 つの値 u,v をとると, 平均値の定理により

$$f(v)-f(u)=(v-u)f'(c), \quad u<c<v$$

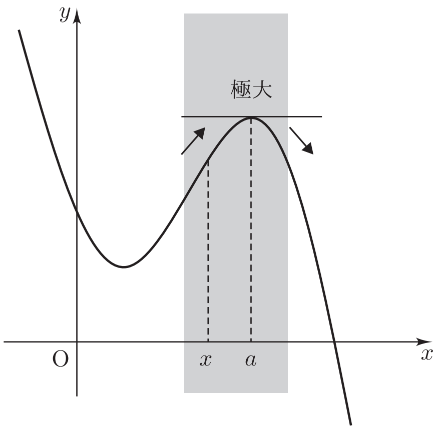
を満たす実数 c が存在する. ここで $v-u>0$, $f'(c)>0$ であるから

$$f(v)-f(u)>0 \qquad \text{よって} \qquad f(u)<f(v)$$

募って, $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で単調に増加する. □

※ 2,3 の証明は問として提示されている.

- [1] [定義] $f(x)$ は連続な関数とする. $x=a$ を含む十分小さい開区間において,「$x \neq a$ ならば $f(x)<f(a)$」が成り立つとき, $f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい, $f(a)$ を極大値という. また, $x=a$ を含む十分小さい開区間において,「$x \neq a$ ならば $f(x)>f(a)$」が成り立つとき, $f(x)$ は $x=a$ で極小であるといい, $f(a)$ を極小値という.



[2] **[定理 1]** 関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとする.

$$f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとるならば, } f'(a)=0$$

[3] **[定理 1 の主張の逆]** 定理の主張の「逆」は成り立たない. すなわち, $f'(a)=0$ でも $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない. 反例として, $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ であるが $f(0)$ は極値ではない.

[4] **[定理 2]** $f(x)$ が微分可能で, $f'(a)=0$ であるとき, $x=a$ を境目として $f'(x)$ の符号がかわるときは, 次のように極値を判定することができる. $x=a$ を内部に含むある区間において

$$x<a \text{ で } f'(x)>0.\ a<x \text{ で } f'(x)<0 \text{ ならば } f(a) \text{ は極大値}$$
$$x<a \text{ で } f'(x)<0.\ a<x \text{ で } f'(x)>0 \text{ ならば } f(a) \text{ は極小値}$$

このことは, 増減表を用いると, 次のように表される.

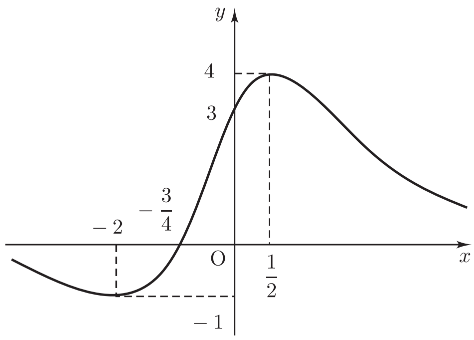
x	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

x	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

[5] **[例題 1]** 関数 $y=\frac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ.

[解] $y'=\dfrac{-2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$. ここで, 常に $(x^2+1)^2>0$ であるから,

x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$

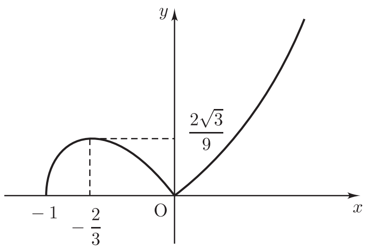


[6] [解説] これまでは, 微分可能な関数の極値について考えてきたが, 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能でない場合にも, $f(a)$ が極値になることがある. たとえば, 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能でないが $f(0) = 0$, $x \neq 0$ のとき $f(x) > 0$. よって, 「$x \neq 0$ ならば $f(x) > f(0)$」が成り立つから, $f(0)$ は極小値である.

[7] [例題 **2**] 関数 $y = |x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ.

[解] この関数の定義域は $x \geqq -1$ である. $x > 0$ では $y' = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$. よって, $x > 0$ では常に $y' > 0$. $-1 \leqq x < 0$ のとき, $y = -x\sqrt{x+1}$ であるから, $-1 < x < 0$ では $y' = -\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$. $y' = 0$ とすると, $x = -\frac{2}{3}$.

x	-1	$\cdots\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
y'		$+$		$-$		$+$
y	0	$\nearrow$	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

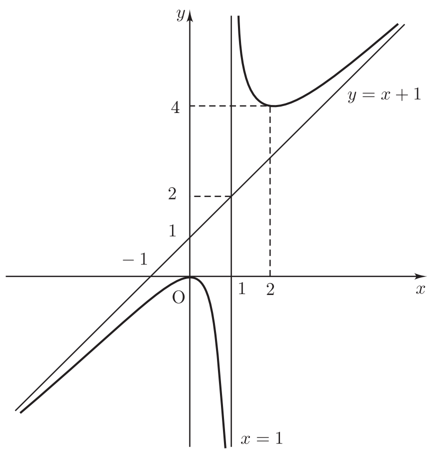


教科書ではこのあとに, (関数の最大と最小),「関数のグラフ」(曲線の凹凸, 関数のグラフの概形) がつづく. 特に, 増減表を使って凹凸まで考慮したグラフを描く例題や問が続く.

[8] **[例題 3]** 関数 $y = \frac{x^2}{x-1}$ のグラフをかけ.

[解] この関数の定義域は $x \neq 1$ である. $y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$. $y' = 0$ とすると $x = 0, 2$. よって y の増減, グラフの凹凸は, 下の表のようになる. $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$ から, 直線 $x = 1$ はこの曲線の漸近線である. さらに, $\lim\limits_{x \to \infty} \{f(x) - (x+1)\} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \{f(x) - (x+1)\} = 0$ であるから, 直線 $y = x + 1$ も, この曲線の漸近線である.

x	……..	0	……..	1	……..	2	……..
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗



そののちに,「関数とグラフ」の最後の小節「第 2 次導関数と極値」において以下が紹介される:

[9] **[定理 3]** $x = a$ を含むある区間で $f''(x)$ は連続であるとする.

1. $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば, $f(a)$ は極大値である.

2. $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば, $f(a)$ は極小値である.

[1. の証明] $f''(x)$ は連続であるから, $x = a$ の十分近くでは $f''(x) < 0$ で, $f'(x)$ は単調に減少する. $f'(a) = 0$ であるから

x	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$x < a \text{ では } \quad f'(x) > 0$$
$$x > a \text{ では } \quad f'(x) < 0$$

よって, $f(a)$ は極大値である. [終]

2. についても, 同様に示すことができる.

[10] 【注意】$f''(a) = 0$ のときは, $f(a)$ が極値である場合も, 極値でない場合もある.

(検定教科書の記述) ここまで

【レポート課題】 以上の検定教科書の記述内容について

(A) 数学的に“ あいまいな ” 点を指摘し, 微分積分学 2 の内容を踏まえて, 厳密な記述に書き換えてみなさい.

(B) 極値全体の議論の流れ (ストーリー性) が理解しずらい点を指摘し, 自分なりに組み直したストーリーを語ってみなさい (自分が高校生に教えるつもりで, 議論の流れを作ってみなさい).

解答例

(A) [記述があいまいな点の指摘とその改良]

$\boxed{(1)}$ [0] の [定理 0] の (たとえば) 1 について, 仮定は「“ 開 ” 区間 (a,b) で $f'(x)>0$」であるが, 結論は「“ 閉 ” 区間 $[a,b]$ で単調に増加する」となっている. 仮定に $x=a$ での微分に関する情報は必要ないのだろうか?

$\boxed{(2)}$ [1] [定義] の「$x=a$ を含む十分小さい開区間」という表記における「十分小さい」という表現が感覚的であり, 数学的ではない.

$\boxed{(3)}$ [2] [定理 1] の証明については何も言及されていない. 自明なのか, さもなければ非自明, あるいは, 高等学校の範囲を超えるから省略するのか, が読み手にはわからない.

$\boxed{(4)}$ [4] [定理 2] の記述で「$x<a$ で $f'(x)>0$, $a<x$ で $f'(x)<0$ ならば $f(a)$ は極大値」という事実の証明が書かれておらず, 増減表によって雰囲気を述べる記述になっている. 自明なのか, さもなければ非自明, あるいは, 高等学校の範囲を超えるから省略するのか, が読み手にはわからない.

$\boxed{(5)}$ [9] [定理 3] において,

(a) 冒頭の「$x=a$ を含むある区間で」というのが厳密に何を言っているのかが分からない.

(b) 1 の証明における,「$f''(x)$ は連続であるから, $x=a$ の十分近くでは $f''(x)<0$」という事実が証明なしに述べられている.

(c) 1 の証明の最後の「よって, $f(a)$ は極大値である」の「よって」もまた「増減表」を用いた雰囲気の記述にとどまっている.

$\boxed{(6)}$ [10] の【注意】については具体的な例示がない. また, $f''(a)<0$ あるいは $f''(a)>0$ を仮定した [定理 3] の証明と照らし合わせて, その議論がどこでどのように破綻するかを明確にしていない. このため, 読者は不得要領に陥る.

以上で指摘した「あいまいな点」に対する (あくまで) 一つの数学的な回答を与えてみたい.

$\boxed{(1)}$ $a \leqq s < t \leqq b$ をみたす任意の s,t に対して考えられる閉区間 $[s,t]$ において, 平均値定理が適用できることを明記すべきであろう. 仮定より, f は $[a,b]$ で連続だから $[s,t]\subset[a,b]$ であることから, f は $[s,t]$ で連続である. この時点でもう一度「区間で連続である」とは, その区間に属する任意の点において連続であること, という定義を再記し読者の注意を促すのが良いと考えられる. なお, たとえば $s=a$ であるならば, $f(x)$ の $x=s$ での連続性は, 右側連続性

$$\lim_{\substack{x\to s\\ x>s}} f(x)=f(s)$$

のみを考える, という議論の制限を行っていることに注意しなければならない. 同様に, $s = b$ ならば左側連続性のみを考える:

$$\lim_{\substack{x \to s \\ x < s}} f(x) = f(s)$$

また, 仮定より f は (a, b) で微分可能だから, $(s, t) \subset (a, b)$ であることから (s, t) で微分可能であることが従う. 微分可能性についても, この時点でもう一度「区間で微分可能である」とは, その区間に属する任意の点において微分可能であること, という定義を再記し読者の注意を促すのが良いと考えられる. 以上の議論を経てはじめて, 閉区間 $[s, t]$ において平均値定理を適用することができる.

さて, 平均値定理では微分可能性は開区間 (s, t) に属する実数においてのみ要求される. 従って, 微分 f' に関する情報はその証明を見ても分かる通り, (a, b) においてのみ仮定すれば十分なのである (つまり, 端点 $x = a, b$ での微分に関する情報は不要である. もっと言えば, 連続性さえあればよく, 微分可能性は不要であることになる). □

(注意) この (1) の疑問を学生に投げかけたことがある. すべての学生が概念図 (グラフ) を描き, そのグラフを用いた「直観的考察」に基づく議論に終始していた. つまり,「$f' > 0$ ならば単調増加である」ということを直観的に理解しているだけであり, その根本原理として「平均値定理」があることを認識できていなかったのである. その一因が, 高等学校の教科書における「証明を欠いた, 図の併記による解説」にあるとも考えられるであろう. 平均値定理を用いた本当の証明を正しく理解している学生にとっては, (1) の疑問に答えを与えることは, それほど難しいことではないだろう.

$\boxed{(2)}$ 極大の定義をより厳密に言えば次のようになる:「少なくとも 1 つの正数 δ が存在して

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}, \ f(x) < f(a)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は $x = a$ で極大であるといい, $f(a)$ を極大値という」なお, このような正数 δ は「存在する」ならば無数に存在する. 何故なら, $\delta_0 > 0$ が上記の条件をみたす正数であるならば, $0 < \delta < \delta_0$ を満たす実数はすべて条件を満たすからである. □

[解説] 「$x = a$ を含む十分小さい開区間において...」という表現は分かりやすい反面, 数学的には誤解を生む. 正確には上記のように, 条件を満たすような正数 δ がとれる (存在する) という意味になる.

$\boxed{(3)}$ ([定理 1] の証明) $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとする. このとき, 極値の定義より極大値をとるか極小値をとるかのいずれかである. たとえば極大値をとる場合を考える (極小値をとる場合も同様に証明される):

$$\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}, \ f(x) < f(a)$$

$x \in (a-\delta, a)$ に対して, $x-a<0$ かつ $f(x)-f(a)<0$ だから,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0$$

仮定より $f(x)$ は $x=a$ で微分可能だから, 極限移行すれば

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ a-\delta<x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0$$

一方, $x \in (a, a+\delta)$ に対して, $x-a>0$ かつ $f(x)-f(a)<0$ だから,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq 0$$

仮定より $f(x)$ は $x=a$ で微分可能だから, 極限移行すれば

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ a-\delta<x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq 0$$

以上より $f'(a) \geqq 0$ かつ $f'(a) \leqq 0$ だから, $f'(a)=0$. □

[解説] ここに記した証明原理は, この記述の前の時点で「発展」“平均値定理の証明 ” において紹介されている. しかし, ここで [定理 1] を述べるのであれば, 上記の証明を発展的内容に入れるべきではないのではないだろうか. そもそも, [定理 1] と平均値定理の証明が, 同一の原理から示されることは, この文脈から読み取ることは困難であろう. □

上記の証明中で「極限移行」を使った. これをイプシロン–デルタ論理式を用いて厳密に証明しておこう. 主張は次の通りである:

[主張] $f(x)$ と $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された関数とする. $a \in \mathbb{R}$ とするとき, 極限 $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ [9] と $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} g(x)$ が実数値として存在すると仮定する. それらの極限値をそれぞれ α, β とおく. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して不等式 $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つならば, $\alpha \leqq \beta$ が成り立つ.

(証明) $\alpha > \beta$ と仮定して矛盾を導く. $\varepsilon_0 := \alpha - \beta > 0$ とおく. $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \alpha$ をイプシロン–デルタ論理式で書けば次の通りである:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

また, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \alpha$ をイプシロン–デルタ論理式で書けば次の通りである:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } 0 < |x-a| < \delta \implies |g(x)-\beta| < \varepsilon$$

[9] 通常の記号法では, $\lim_{x \to a}$ は暗黙の裡に $x \neq a$ であることが仮定される. この科目では, 左右極限その他の記号法に合わせて, それを明記している.

これらを $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{4}$ として適用する. その結果, 正数 δ_1, δ_2 が存在して次が成り立つ:

$$\begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-\alpha| < \dfrac{\varepsilon_0}{4} \\ 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)-\beta| < \dfrac{\varepsilon_0}{4} \end{cases}$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば, $\delta \leqq \delta_1$ かつ $\delta \leqq \delta_2$ であることに注意すれば, 次が成り立つ:

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-\alpha| < \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ かつ } |g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

特に

$$0 < |x-a| < \delta \implies g(x) < \beta + \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ かつ } f(x) > \alpha - \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$x_0 = a + \frac{\delta}{2}$ とおくと, $0 < |x_0 - a| < \delta$ が成り立つ. よって,

$$g(x_0) < \beta + \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ かつ } f(x_0) > \alpha - \frac{\varepsilon_0}{4} \tag{4.1}$$

でなければならない.

$$\left(\alpha - \frac{\varepsilon_0}{4}\right) - \left(\beta + \frac{\varepsilon_0}{4}\right) = (\alpha - \beta) - \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$$

だから, 次の不等式を得る:

$$\beta + \frac{\varepsilon_0}{4} < \alpha - \frac{\varepsilon_0}{4}$$

従って, (4.1) から $g(x_0) < f(x_0)$ を得ることになるが, これは仮定に矛盾する. □

$\boxed{(4)}$ 次の (5) の証明中に含めてある.

$\boxed{(5)}$ (a), (b), (c) を明確にして定理と証明を書き直してみよう.

[定理 3] 少なくとも 1 つの正数 σ が存在して, $f(x)$ は開区間 $(a-\sigma, a+\sigma)$ で 2 回微分可能であり, 第 2 次導関数 $f''(x)$ は $(a-\sigma, a+\sigma)$ で連続であるとする. $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば, $f(a)$ は極大値である.

[証明] 仮定より, $f''(x)$ は開区間 $(a-\sigma, a+\sigma)$ でのみその存在が仮定されており, かつ, $x = a$ で連続だから,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \sigma \text{ s.t. } |x-a| < \delta \implies |f''(x) - f''(a)| < \varepsilon \tag{4.2}$$

ここで, $\varepsilon := -\frac{f''(a)}{2}$ とおくと, $f''(a) < 0$ だから $\varepsilon > 0$ である. よって, (4.2) をこの ε に対して適用することができて,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x-a| < \delta \implies |f''(x) - f''(a)| < \varepsilon$$

このような δ をとる. $|f''(x)-f''(a)|<\varepsilon$ と $-\varepsilon<f''(x)-f''(a)<\varepsilon$ は同値だから, 特に $f''(x)-f''(a)<\varepsilon$. よって,

$$f''(x)-f''(a)<\varepsilon=-\frac{f''(a)}{2}$$

従って,

$$x\in(a-\delta,a+\delta)\quad\Longrightarrow\quad f''(x)<\frac{f''(a)}{2}<0 \tag{4.3}$$

さて, $x,x'\in(a-\delta,a+\delta)$ with $x<x'$ を任意の実数とする. このとき, 閉区間 $[x,x']$ において f' に対して平均値定理を使う. なお, f は $\mathbb{R}$ で 2 回微分可能だから, f' は $\mathbb{R}$ で 1 回微分可能だから, 特に f' は (x,a) で微分可能, かつ, $[x,a]$ で連続だから, 平均値定理が適用可能であることに注意する. こうして,

$$\exists\xi\in(x,x')\quad \text{s.t. } f''(\xi)=\frac{f'(x')-f'(x)}{x'-x} \tag{4.4}$$

このような ξ について, $\xi\in(x,x')\subset(a-\delta,a+\delta)$ だから, 特に $\xi\in(a-\delta,a+\delta)$. よって, (4.3) より $f''(\xi)<0$. こうして, (4.4) より

$$\frac{f'(x')-f'(x)}{x'-x}=f''(\xi)<0$$

分母は正だから, これにより $f'(x')<f'(x)$ を得る. 以上から,

$$x,x'\in(a-\delta,a+\delta)\text{ with }x<x'\quad\Longrightarrow\quad f'(x)>f'(x') \tag{4.5}$$

(これは言葉でいえば「f' は $(a-\delta,a+\delta)$ で狭義単調減少関数である」と言える). こうして,

$$\begin{cases} x\in(a-\delta,a) \text{ ならば } x<a \text{ だから } f'(x)>f'(a)=0 \\ x\in(a,a+\delta) \text{ ならば } a<x \text{ だから } f'(x)<f'(a)=0 \end{cases}$$

$x\in(a-\delta,a)$ を任意の実数とする. このとき, f に対して閉区間 $[x,a]$ で平均値定理を適用する. f は $\mathbb{R}$ で微分可能だから, 特に f は閉区間 $[x,a]$ で連続, かつ, 開区間 (x,a) で微分可能だから平均値定理は適正に適用可能である. よって,

$$\exists\eta\in(x,a)\quad \text{s.t. } f'(\eta)=\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

このような η をとると, $\eta\in(x,a)\subset(a-\delta,a)$ だから, $f'(\eta)>0$. よって,

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}=f'(\eta)>0$$

第 1 項の分母は正だから, $f(a)>f(x)$. こうして,

$$x\in(a-\delta,a)\quad\Longrightarrow\quad f(x)<f(a) \tag{4.6}$$

以上の議論を $x \in (a, a+\delta)$ を任意の実数として議論すれば, $a-x$ と f' の符号が逆になることに注意すれば, やはり次の結論を得る:

$$x \in (a, a+\delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(a) \tag{4.7}$$

(4.6) と (4.7) より

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(a)$$

これは定義より $f(a)$ が極大値であることを意味する. □

[解説] 冒頭で述べた f'' の符号に関する「遺伝」の性質は, 定理 3 においては極めて本質的である. そもそも, 極大, 極小という概念は $x=a$ の「近傍」, すなわち, 少なくとも 1 つの正数 δ が選べて, 開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ 上で考える概念である. その判定法を $f''(x)$ の「$x=a$ ただ 1 点での性質 ($f''(a)$ の符号)」のみから導こうというのだから, なにか特別なトリックが隠されているはずである. それが $f''(x)$ の連続から導かれる「遺伝」という性質である. このことには多くの生徒が不思議に思う点であり, むしろこれを機会として, なんとなくの理解にとどまっていた「連続性」という概念の実際の使い方を見せるチャンスでもある.

※ (4) や (5)-(c) の証明は実は [定理 0] で述べられている. しかし, [定理 2] の記述ではそのことには一切触れられておらず, 増減表によって感覚的にとらえるようになっている. このため, 大学 1 年生のほとんどがグラフのイメージに基づいて [定理 2] を理解しているに過ぎず, 平均値定理が根本原理になっていることに全く気づいていない.

$\boxed{(6)}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ が成り立つ場合は $f(a)$ が極値であるかどうかの判定はできない. その理由を以下の 2 つの方向から考察しよう.

(方向性 1) — 証明の技術的理由

$f''(a)=0$ ならば, イプシロン–デルタ論理式において

$$|f''(x)| = |f''(x) - f''(a)| < \varepsilon$$

となる. よって, ε にいかなる正数を代入しても, $f''(x)$ の符号を特定することは不可能である.

(方向性 2) — 具体例による説明

以下に示すように, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ であっても, $f(0)$ は極小値, 極大値, そのいずれでもないということが起こり得る. つまり,「$f'(0)=0$, $f''(0)=0$」であることからは, 極値の判定は一般にできないことになる:

- [例 1] $f(x)=x^4$ は $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ であり, $f(0)$ は極小値である.
- [例 2] $f(x)=-x^4$ は $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ であり, $f(0)$ は極大値である.
- [例 3] $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ であるが, $x=0$ で極値をとらない. □

ここで, [例 1-3] の極値に関する事実を定義に基づいて証明しなさい, という練習問題を与えると, とても良い論理の勉強になるであろう.

[余談]

以上が, 高等学校の教科書を, 大学微分積分学の知識を用いて厳密化した記述である. もちろん, イプシロン–デルタ論理式による連続性の定義は高校生は知る由もない. しかし, 特に数 III の内容を, 雰囲気ではなく「正しく教える」ためには, 数 III の微分積分学の単元で扱われるすべての事実に対して, その証明をイプシロン–デルタ論法で精密に書き下しておく, という授業準備が教師側には最低限必要になるだろう. どうやって雰囲気を伝えるか, ではなく, どうやって厳密な証明に基づいた本物の数学を見せることができるか, が「数 III の教育」であろう. 高校生はどうせ厳密な証明などわからないから, むしろ雰囲気こそが本質であり, 受験問題が解けるようになりさえすれば, それで十分である, と考えて本物の数学を教えることから避けて通ることは, 教師側の言い訳に過ぎないであろう. 高校生にどのように教えるか, という教育方法は度外視したとしても, 少なくとも教える側の教師は上記のような厳密な証明を「踏まえた説明」をしなければならない. 本当の答えを知らずに教えていると, いつの間にか説明がテキトーになってしまう, ということだけは断言しておこう.

なお, 上記の証明で高校生への説明としてなじまない箇所は唯一, $f''(x)$ の $x=a$ での符号情報から $(a-\delta, a+\delta)$ 上で f'' の符号情報が遺伝することの証明であり, それを連続性の定義であるイプシロン–デルタ論理式を出発点としている点のみであろう. これはしかし, 次のように解説することもできる.

[高校生向けの証明]

証明したいことは

$$\exists\delta > 0 \ \text{ s.t. } \forall x \in (a-\delta, a+\delta),\ f''(x) < 0$$

これを否定すれば

$$\forall\delta > 0,\ \exists x \in (a-\delta, a+\delta) \ \text{ s.t. } f''(x) \geqq 0$$

さて, $\delta = \frac{1}{j}$ $(j \in \mathbb{N})$ とし, それに応じて決まる x を x_j とおくと, $x_j \in (a - \frac{1}{j}, a + \frac{1}{j})$ よりはさみうち原理から, $x_j \to a$. また $f''(x_j) \geqq 0$ だから, $f''(x)$ の $x=a$ での連続性から,

$$f''(a) = \lim_{j\to\infty} f''(x_j) \geqq 0$$

となり, 仮定 $f''(a) < 0$ に矛盾する. □

※ このように説明してもなお, 大学 1 年生である皆さんも多かれ少なかれ苦労したであろう「否定」については, 高校生はやはり理解に苦労することは大いに予想される. しかし, これをどのようにして高校生が納得するように説明するか, ということこそが高校教師の真の腕の見せどころではないだろうか.

上記の証明で,「$a \pm \frac{1}{j} \to a\ (j \to \infty)$」「はさみうち原理」「$x_j \to a\ (j \to \infty)$ ならば $\lim_{j\to\infty} f''(x_j) = f''(a)$」という2つの事実を使った. これらをイプシロン–デルタ論法により, 証明しておこう.

[1] 収束性

[主張]

a を実数とする. このとき,

$$\lim_{j\to\infty}\left(a+\frac{1}{j}\right)=a$$

(証明) ε を任意の正数とする. $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ とおく. ただし, 実数 α に対して $[\alpha]$ は, α を超えない最大の整数とする. ここで, $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ だから,

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \geqq [0] = 0$$

よって, N は自然数であることに注意する. j を N より大きい任意の自然数とする. このとき,

$$j > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

だから,

$$\left|\left(a+\frac{1}{j}\right)-a\right| = \frac{1}{j} < \varepsilon$$

以上により,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } j > N \implies \left|\left(a+\frac{1}{j}\right)-a\right|$$

すなわち, 主張が証明された. □

[2] はさみうち原理

[主張]

数列 $\{a_j\}$ と $\{b_j\}$ は $j \to \infty$ とするとき, 実数 α に収束するとする. 数列 $\{x_j\}$ が不等式

$$a_j \leqq x_j \leqq b_j \quad (j \in \mathbb{N})$$

を満たすとする. このとき, x_j は $j \to \infty$ のとき α に収束する.

(証明) 仮定 $\lim_{j\to\infty} a_j = \alpha$, $\lim_{j\to\infty} b_j = \alpha$ から

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } j > N \implies |a_j - \alpha| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } j > N \implies |b_j - \alpha| < \varepsilon \end{cases}$$

よって, $\varepsilon > 0$ を任意の正数とするとき, 次をみたす自然数 N_1, N_2 が存在する:

$$\begin{cases} j > N_1 \implies |a_j - \alpha| < \varepsilon \\ j > N_2 \implies |b_j - \alpha| < \varepsilon \end{cases}$$

$N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ とおく. このとき, $N_0 \geqq N_1$ かつ $N_0 \geqq N_2$ だから, 特に次が成り立つ:

$$j > N_0 \quad \implies \quad a_j > \alpha - \varepsilon,\ b_j < \alpha + \varepsilon$$

仮定の不等式 $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ $(j \in \mathbb{N})$ より, j を N_0 より大きい自然数とすれば

$$\alpha - \varepsilon < x_j < \alpha + \varepsilon$$

すなわち, $|x_j - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. 以上により次が証明されたことになる:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } j > N \implies |x_j - \alpha| < \varepsilon$$

これは $\lim_{j \to \infty} x_j = \alpha$ を意味する. □

(B) [ストーリー性の改良]

ストーリー性が「見えにくい」箇所を列挙して, それを補ってみたい.

(1) [2] の [定理 1] を紹介する意義が見えにくい. 実際, 教科書の言いたいことは, 今後の議論では登場することがない [定理 1] を紹介し, “ しかし ” その逆命題は成り立たないということを [3] で述べる. ところが, $f'(a) = 0$ という情報に加えて, $x = a$ を境目として $f'(x)$ の符号がかわる, という条件を付加すれば, 極大, 極小を判定することができる ([定理 2]), という流れになっている. しかし, [4] [定理 2] の証明では, 平均値定理という原理は述べられず, 増減表の併記による雰囲気の記述にとどまっている.「$f' > 0$ ならば増加」や 「$f' < 0$ ならば増加」を直観的イメージとして認めてしまえば, 極値であることは自明な事実になる. また, [7] の [例題 2] で紹介されているような $x = a$ においてのみ微分不可能な場合でも, この事実は成り立つ (下の [定理 2′]). [例題 2] を紹介するのであれば,

$$[\text{定理}\,1] \implies ([\text{定理}]\ \text{の逆は偽}) \implies [\text{定理}\,2]$$

というストーリーには無理が感じられる. これが原因であるかどうかは定かではないが, [定理 1] の内容が頭に残っている大学 1 年生は稀である.

(2) [1] の極大極小の定義においては, 関数に微分可能性は一切仮定されていない. しかし, その直後の [2] [定理 1] では微分可能性が仮定された議論が展開されている. そののちに, [6] で微分可能でなくても, 極値になることがある, ということが紹介されている. 実に混乱を招くストーリー展開になっている.

(3) [7] までで増減表 (y' のみ) とグラフによって極大, 極小を調べる方法が紹介され, そののちにグラフの凹凸まで考慮して, やはり極大, 極小が議論されている. 凹凸を調べることにより, グラフをより正確に描くことは出来るが, 極大, 極小であることを調べるためには関数の増減さえ分かればよく, 第 2 次導関数 y'' まで調べる必要はない. もちろん, ここで第 2 次導関数まで導入したのは, [9] [定理 3] を述べる布石にしたかったからであろうとも推測される. しかし, y' の情報だけで極大, 極小が分かる, という認識において [定理 3] を紹介する意味は, 果たしてあるだろうか? 実際, 数学的には大変重要な考察が含まれる抽象論である [定理 3] は, 多くの高校生にとって「グラフを描けば自明であり, 無用の長物である」という程度の理解にとどまっているように思われる.

以上を踏まえ, 教科書の内容を網羅する「ストーリー立て」を例示してみよう[10].

第一部: 具体的な関数に対する極大極小と微分係数を用いた必要条件

[1] 極値の [定義] を記述する. ただし, 極大極小という概念と「微分」の概念はそもそも全く独立であるという注意を与える.

[2] 関数 $f(x)$ に連続性しか保証しなければ, 極大, 極小を調べることに関して, わたしたちは一般には全くの無力であることを説明する. だからこそ,「微分」の助けを借りることになる, というストーリーを強調する. こうした背景により, 極大極小という概念が「微分」と大きくかかわってくることになる.

※ もう少しいえば, 極値の定義は微分を学ぶ前に紹介するのが本来のストーリーかもしれない. しかし, それでは実際に極値を見つけたり判定することができないため, 微分を学んだあとに紹介されることになるのであろう.

[3] 微分可能性を適宜仮定することにより, 次の [定理 2]$'$ が証明されるため, 極大極小であることを判定することができるようになる.

[定理 **2**]$'$

$f(x)$ が $x = a$ を含む開区間 (α, β) 上で連続であり, ただ 1 点 $x = a$ を除いて $f(x)$ は微分可能であるとする. $x = a$ を境目として $f'(x)$ の符号がかわるときは, 次のように極値を判定することができる. $x \in (\alpha, \beta)$ について

$$x < a \text{ で } f'(x) > 0.\ a < x \text{ で } f'(x) < 0 \text{ ならば } f(a) \text{ は極大値}$$
$$x < a \text{ で } f'(x) < 0.\ a < x \text{ で } f'(x) > 0 \text{ ならば } f(a) \text{ は極小値}$$

(証明) $x < a$ で $f'(x) > 0$, $a < x$ で $f'(x) < 0$ とする. $x < a$ のとき, 閉区間 $[x, a]$ で平均

[10] ここに述べる「ストーリー」はもちろん単なる一例に過ぎない. 教える教師によってそれぞれ異なっていて良いことであると考える. 高校生が納得できるストーリーを考え説明することが, 教師の本来の腕の見せどころではないだろうか.

値定理を適用する. $f(x)$ は (α, β) で連続であり, $[x, a] \subset (\alpha, \beta)$ だから, $f(x)$ は $[x, a]$ で連続である. また, $(x, a) \subset (\alpha, a)$ だから, $f(x)$ は (x, a) で微分可能である. よって, 平均値定理の適用は可能である. その結果,

$$\exists c \in (x, a) \ \text{ s.t. } f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x - a < 0$ かつ $f'(c) > 0$ より $f(x) - f(a) < 0$. すなわち, $f(x) < f(a)$ を得る. 同じようにして, $x > a$ のときも $f(x) < f(a)$ を得る. こうして, $f(a)$ は極大値である. 極小値の場合も同様に証明できる. □

[4] [例題 2] $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$ に対して, $f(0)$ が極小値であることを説明する. ただし, これが $a = 0$, $(\alpha, \beta) = (-1, +\infty)$ として上記の [定理 2′] の仮定を満たすことの検証は明記すべきであろう.

1. $f(x) = |x|\sqrt{x+1}$ は $(-1, \infty)$ 上で連続である.

   (証明) $y = |x|$ と $y = \sqrt{x+1}$ は $(-1, \infty)$ 上で連続である. 連続な関数同士の積によって定義される関数は連続だから, 証明すべきことが示された.

2. $(-1, \infty) \setminus \{0\}$ で微分可能

   (証明) $x < 0$ の場合. $f(x) = -x\sqrt{x+1}$ と表せる. $y = -x$ も $y = \sqrt{x+1}$ も $(-1, 1)$ で微分可能である (注意: 後者の関数は $x = -1$ においては微分不可能である). 従って, 微分可能な関数同士の積によって定義される関数は微分可能だから, 証明すべきことが示された. $x > 0$ の場合も同様にして証明される.

(注意) $x = 0$ において, 左側微分係数は $-\frac{1}{2}$ であり, 右側微分係数は $\frac{1}{2}$ だから, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではない.

以上と, $x \in (-\frac{2}{3}, 0)$ に対して $f'(x) < 0$ であり, $x \in (0, \infty)$ に対して $f'(x) > 0$ であることから [定理 2′] が適用可能であり, $f(0)$ が極小値であることが証明される.

※ 以上の議論のあとに, 実際にグラフを描いてみることで, $f(0)$ が極小値になっていることを確認するということは意味のあることであろう.

[5] [定理 2]′ では, $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であることは仮定されていないが, もちろん微分可能であることが分かっている場合にも適用される. なお, この場合は必然的に $f'(a) = 0$ となることに注意しよう. 実際, まず [定理 2]′ により, $f(x)$ が $x = a$ で極値をとることがわかる. ここで, [定理 1] を紹介する. そして, [定理 1] により $f'(a) = 0$ が従う. つまり, 微分可能である場合については $f'(a) = 0$ は $f(x)$ が $x = a$ で極値をとることの必要条件である. なお, [定理 1] の証明は省略せずにきちんと紹介し, その原理が平均値定理の証明 (発展的内容) と同じ原理に基づいていることを説明する.

[6]　[例題 1] をまさにこのタイミングで紹介する. 以上により f' の符号を調べて, グラフでの考察を行うことにより極値が判定できることがある, という議論が完結する. $f'(a) = 0$ となっていることもまたここで確認する.

第二部**:** 微分の符号情報に基づいた極値判定法

[7]　次の [問題提起] を提示することから始める:

[問題意識]

グラフを描くことが困難な場合に, グラフの概略を描くという手順を踏むことなく, 定義域内の各点における微分の情報のみから極値を見つけ出す方法はないだろうか?

[8]　まずは, 関数に 1 回微分可能性のみを仮定して議論を進める. 第一部ですでに紹介した [定理 1] を思い出し, 残念ながらその逆

「$f'(a) = 0$ ならば, $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる」

が一般に偽であることを反例を挙げて説明する ($f(x) = x^3$, $x = 0$ など). しかしながら, [定理 1] の対偶は真であるから

「$f'(a) = 0$ でないならば, $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない」

は正しいことになる. つまり, 役に立たないと思われた [定理 1] から「極値を取らないことの判定法」が得られるのである. 言い換えれば $f'(a) = 0$ を満たさない $x = a$ は「極値の候補」から除外してかまわないことになる. これは, 極値の候補を絞るという作業においては大変有効な手段を与える.

[9]　極値の候補をさらに絞って, 実際の極値を見つけ出す方法はないだろうか? このため, $f(x)$ が 2 回微分可能であって, 第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続である場合を考える. ここで [定理 3] を紹介する: $f'(a) = 0$ が成り立つとする. すなわち, もはや極値の候補のみを議論の対象とするのである. さらに, もし, $f''(a)$ の符号が「正」または「負」と確定するならば, $f(a)$ はそれぞれ極小値, 極大値であると判定できる, ということである.

[10]　ここで, [定理 3] の証明に関連して, 重要な注意を与える.

[定理 3] は, $f(x)$ の $x = a$ での 1 階微分と 2 階微分の符号「のみ」から極大極小を判定できることを主張する定理である. グラフで直観的に考えれば極値は, 考える点 $x = a$ を内部に含む区間における関数値の挙動を調べなければ何もわからないはずである. このことを考えれば, [定理 3] は実に驚くべき主張であると言える. 特に, f'' の符号については $x = a$ を内部に含む区間で「定符号」でなければ凹凸という事実が得られない. それにも関わらず, 仮定はあくまで $f''(a)$ での符号のみで議論をしている. このトリックが $f''(x)$ の $x = a$ での連続性という仮定である. このことは注意しておく価値があることであろう.

ところで, 高等学校の数学 III では, $f''(x)$ が $x=a$ で連続であることを

$$\lim_{x\to a} f''(x) = f''(a)$$

が成り立つこととして定義している. この定義から「$x=a$ を内部に含む区間で $f''(x)$ の符号が確定する」という事実が導かれることは, 高校生にとっては実に不可解であろう.

これが連続性をイプシロン–デルタ論理式によって定義することによって実にスマートに解決される. 極限を「限りなく近づく」という直観的表現で定義することは, 教科書の極限に関する練習問題を解いたり, 入試問題を解いているうちは, 不自由さに気づくことはない. その一方で, 教科書に厳然と記述されている [定理 3] およびその証明においてはもはや直観的定義では説明が困難であるという場面に遭遇することになる. この [定理 3] をきっかけにして, 数学 III ではどうしても議論に限界があり, 大学でイプシロン–デルタ論法という定量的な定義を学ぶことになる, という数学 III の先にある数学について, 言葉のレベルでも良いので紹介することは, 動機付けとしては有意義であろうとも考えられる.

[11] [例題 3] の関数について, グラフを描かずに極大値と極小値を見つける演習を行う. はじめに, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ が $x \neq 1$ では何回でも微分可能な関数であることに注意する. 実際, 関数 $y = x^2$ と $y = x-1$ は $x \neq 1$ で何回でも微分可能であり, $y = x-1 \neq 0$ だからそれらの分数として定義される関数 $f(x)$ もまた何回でも微分可能である. 特に $f''(x)$ は $x \neq 0$ で微分可能だから連続である. こうして, 定理 3 が $x \neq 1$ で適用できることに注意する.

1. 方程式 $f'(x) = 0$ を解く: $x = 0, 2$
2. 極値を与える x の値は, 0 と 2 であることがわかる. ただし, これらはまだ候補であるだけであり, 極値を与えるかどうかは不明である.
3. $f''(0) = -2 < 0$ だから $f(0)$ は極大値. $f''(2) = 2 > 0$ だから $f(2)$ は極小値であることがただちに判明する.

(注意) グラフを描くという手間を経ることなく, 極大値, 極小値をすべて見つけ出すことができたことになる. その上で, 凹凸まで考慮してグラフを描いて, 漸近線などの概念を習得をすることは十分に意味のあることであろう. 第二部の内容は大学の微分積分学で 2 変数関数に対する議論に自然に拡張され, 大いに威力を発揮することになる. 実際, 2 変数関数の場合は, “ グラフを描いて極値を見つける ” ということはほぼ絶望的に近い. その意味で第二部は大学数学への布石になっている, という「この単元の先にある数学」を紹介することも大変有意義であろう. □

[12] 第二部の例として次の練習問題を解く:

> [練習問題]
>
> 関数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ の極大値と極小値を与える x をすべて求めなさい.

(注意) この関数のグラフは「微分積分学 1」で紹介したが, それは $x = 0$ の近くで無限回振動する曲線であり, 数学 III で通常扱われるグラフに比べるとイメージしにくい. それにも関わらず, 極値は [定理 3] を用いることにより過不足なく正確に求めることができる. そのような好例になっている.

(解法) $x > 0$ において $y = \frac{1}{x}$ は何回でも微分可能であり, $\sin t$ は $t \in \mathbb{R}$ に対して何回でも微分可能だから, 合成関数微分法により $f(x)$ は $x > 0$ で何回でも微分可能である. さて, 1 次, 2 次導関数を計算すると次の通りである:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\sin\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

1. 極値を与える x の候補を見つける.

本文で述べた通り, $f'(a) = 0$ $(a > 0)$ の解 a が極値を与える候補である.

$$-\frac{1}{a^2}\cos\frac{1}{a} = 0$$

$-\frac{1}{a^2} < 0$ だから, これは $\cos\frac{1}{a} = 0$ と同値である. 従って, $\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. よって, 極値を与える x の候補は

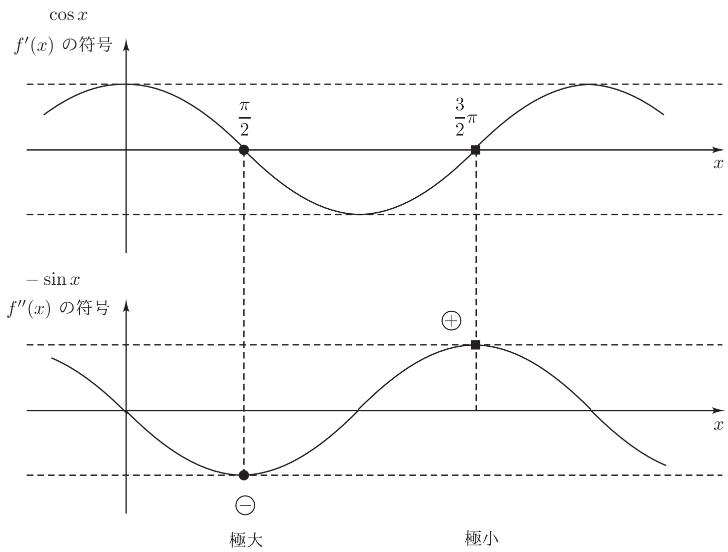
$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

これ以外の実数は決して極値を与えないので, 除外することができる.

2. 1 で得られた候補から極大値, 極小値を与える x を見つけ出す. $a_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ とおくと, $\cos a_k = 0$ だから,

$$f''\left(\frac{1}{a_k}\right) = \frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x}\Big|_{x=\frac{1}{a_k}} - \frac{1}{x^4}\sin\frac{1}{x}\Big|_{x=\frac{1}{a_k}} = -a_k^4\sin a_k$$

従って, $f''(\frac{1}{a_k})$ の符号は $-\sin a_k$ の符号と一致する. よって,



より, $b_\ell = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\ell\pi}$ $(\ell \in \mathbb{Z})$ は $f''(b_\ell) < 0$ を満たすので極大値を与え, $c_m = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2m\pi}$ $(m \in \mathbb{Z})$ は $f''(c_\ell) > 0$ を満たすので極小値を与える. こうして,

$$(\text{答})\quad \begin{cases} [\text{極大値を与える } x \text{ のすべて}] = \left\{ \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\ell\pi} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{Z} \right\} \\ [\text{極大値を与える } x \text{ のすべて}] = \left\{ \dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi+2m\pi} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$$

□

[13] 発展的内容

[9], [10] において, たとえば, $f''(a) > 0$ という情報から $f''(x)$ の連続性の助けを借りることにより, $x = a$ を含むある開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ が存在して,

$$f''(x) > 0 \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

という事実を導くことができることを強調した. しかし実は, この連続性は不要である. [定理 3] を最もシャープにした次の [定理 3′] を紹介し, 証明をつけておこう.

[定理 **3′**] (極大 · 極小判定法)

$a \in \mathbb{R}$ とする. 正数 $\delta > 0$ が存在して $f(x)$ は開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ 上で微分可能, $x = a$ で 2 回微分可能で $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ ならば, $f(a)$ は極大値である.

(注意) $f''(a) < 0$ の代わりに $f''(a) > 0$ を仮定すれば, $f(a)$ は極小値である.

(注意) 2 回微分可能性は $x = a$ の一点でしか仮定されていない点が注目に値する. ただし, $f(x)$ の $x = a$ での 2 回微分可能性を仮定するためには, $x = a$ を含む開区間での 1 回

微分可能性は仮定しなければならない．なぜなら, $x=a$ を含む開区間で $f'(x)$ が定義されなければ, 2 回微分

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

は定義すら, できないからである． □

([定理 3′] の証明)　$f''(a)<0$ であることを定義に基づいて書き直せば,

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}<0$$

となる．このとき, 次を証明する:

$$\exists\delta_0 \text{ with } 0<\delta_0<\delta \quad \text{s.t. } 0<|h|<\delta_0 \implies \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}<0 \tag{4.8}$$

背理法で証明する．上の論理式を否定すれば

$$\forall\delta_0 \text{ with } 0<\delta_0<\delta,\ \exists h \text{ with } 0<|h|<\delta_0 \quad \text{s.t. } \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\geqq 0$$

n_0 を $\frac{1}{n_0}<\delta$ を満たす自然数とする．このとき, $\delta_0=\frac{1}{n}$ $(n=n_0+1,\ldots)$ として上の論理式を適用し, それに応じて存在する h を h_{n-n_0} とおく．すなわち,

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad h_n\in\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\setminus\{0\} \\ \text{(b)} \quad \dfrac{f'(a+h_n)-f'(a)}{h_n}\geqq 0 \end{cases} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

を満たす (0 を項にもたない) 数列 $\{h_n\}$ を得る．このとき, (a) より

$$-\frac{1}{n}<h_n<\frac{1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

だから, はさみうち原理から, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$. また, 不等式 (b) の $n\to\infty$ の極限移行により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(a+h_n)-f'(a)}{h_n}\geqq 0$$

$f(x)$ は $x=a$ で 2 回微分可能だから, 上式左辺は $f''(a)$ に他ならない (関数の極限の数列による言い換え)．従って, $f''(a)\geqq 0$ が従うので矛盾である．

こうして, (4.8) より

$$\begin{cases} f'(x)<f'(a)=0 & \text{for } x\in(a-\delta_0,a) \\ f'(x)>f'(a)=0 & \text{for } x\in(a,a+\delta_0) \end{cases}$$

$f(x)$ は $(a-\delta,a+\delta)$ で微分可能だから, $(a-\delta_0,a+\delta_0)$ において連続である．よって, [定理 2′] により $f(a)$ は極大値である． □

(注意) $f''(a) < 0$ という事実から (4.8) を証明することは, 極限のイプシロン–デルタ論理式による定義を使えば, ずっと簡単に証明することができる (上記は高校生にとって, より理解しやすい記述を試みた). 「連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, $f(b) > 0$ ならば, ある正数 σ が存在して $f(x) > 0$ $(x \in (b - \sigma, b + \sigma))$」の証明に倣って, 各自証明をつけてみてほしい. □

【余談】以上のように, 教科書の紙背に隠された数学本来のストーリーを読み取ったり, 一からすべて自力で構築することは, 数学の表層的理解や受験問題解法テクニックの理解程度の勉強では到底困難であろう. 特に教職志望の学生には残り 3 年間の大学生活での, 専門数学の「心からの理解」に基づく継続的な努力を期待する. □

5 謝辞

本稿で紹介させていただいた「新しい講義方法の試み」を実践するにあたり, 背中を押してくださったのが長岡亮介 先生の「歪んでしまった現行教育を正しい方向に戻したい」という熱い思いである. ゼミ学生ともども大変お世話になっている長岡先生に深く感謝の意を表したい. TECUM 研究会参加を通じて受けてきた刺激にも大きな勇気を与えられた. さらに, 「茗渓三人衆」磯山健太 先生, 新妻翔 先生, 谷田部篤雄 先生による遠隔教育下での斬新な試みもまた, 実践への大きなきっかけになり, 重要なヒントを与えてくれた. ここに心からの御礼を申し上げたい.

参考文献

[1] 岡本 久 · 長岡 亮介 「関数とは何か」– 近代数学史からのアプローチ (近代科学社)

[2] 杉浦 光夫 「解析入門 I」 (東京大学出版会)

[3] 長岡 亮介 「君たちは, 数学で何を学ぶべきか」 – オンライン授業の時代にはぐくむ《 自学 》の力 (日本評論社)

山浦義彦著
「高校から大学への飛躍を学生に誘発する自己反省型の数学のレポートのシステム」
査読結果報告

機関誌委員会付置編集小委員会主査
長岡 亮介

TECUM 編集委員会の下に組織された編集小委員会の主査を勤めた経緯から、査読者全員から「掲載にふさわしい」との評価を得たので、論文編集委員会の議論を総括的に報告する。

査読者全員が合意した意見の他に、小委員会委員長から機関誌委員長を介して依嘱した査読委員からの意見で、特に重要なものは、箇条書的に挙げると以下のようである。

- 各大学において 2020 年度に突然，オンライン講義が始まったという状況下でそれぞれの教員が学生の学習を保証するためのさまざまな取り組みを行って来たが，高校の教員を目指す学生が多い大学の 1 年生に対する授業において,「数学が分かる」とはどういうことなのかを学生が実感するような取り組みの報告であり，TECUM の会員にとって，非常に有用な情報が多い。

- 著者は，まず「いかにして通常の対面講義の質を維持できるか」という点だけでなく，より反省的に「遠隔講義だからこそできることは何か」と根源に立ち返る。すると，必然的に「この講義を通して，学生たちにどのような経験をしてほしいか，いかなる認識をもってほしいか」という，いわば《講義の目標》を見つめることになり，そこから従来のペーパー試験による評価の弱点がみえ，それを乗り越える可能性を秘めた評価のシステム「二度にわたるレポートの提出」という重要な発想に思い至ったようだ。

- 論考にもあるように，このシステムが受講者に**「数学は問題を解いてマルをもらう科目だ」という認識から「自分で考える学問だ」という認識への転換**をもたらした点が注目に値する。

- ペーパー試験，とりわけ単純に正否を判断できる試験は,（著者も逆の文脈で述べているように）「客観性」に秀でた評価方法のように思われて来たが,ペーパー試験では，上のような《受講者の認識の転換》はもたらされ得なかったであろうと言わざるを得ない。

- 著者もあらかじめ「主観が入ることは避けられない」と注意深く述べているように，レポートによる評価にはその「客観性」への批判が想定されるが，それを覚悟してあらかじめ極めて斬新な「採点基準」を学生に提示するという著者の誠実な姿勢が，学生たちに良い意味での緊張感をもたらした可能性を指摘したい。

- 著者自身も述べているように，この評価システム自体の正当性の判断は即時的には難しいかも知れないが，この実践は，とりわけ大学での学問に対する先入観のない１年生に向けたものとして，疑う余地なく意義深いものである。

- 本論考は，実践，そしてその背景にある思想ともに，TECUM の会員と共有すべき深い示唆に富んでいる。

- 本書の付録的な位置づけの「レポート課題の一例」も，高校以下の教育に携わるものにとっても、実に貴重な資料である。

以上を踏まえて、以下に、委員長見解をまとめる。

本論考は、元々の表題「大学における遠隔教育の実践報告」を最初にお送り頂いた評者が、その内容を読んで、直ちに、「内容の豊さに比してタイトルが著者のお人柄を反映してのことであろうが、あまりに謙虚、あまりに貧弱なのではないでしょうか」のような感想をお返しした際、「例えば、」として提案した具体例をそのまま新タイトルとして採用して頂き、上のようになったという経緯を報告しなければ、公平を欠くであろう。

評者は、何故、タイトルの変更を著者に提案したのだろか。それは「実践報告」という字句から連想されがちな、医学などで一般的な平凡な**臨床症例報告** ***clinicalcasestudy*** **のようなものではまったくない**からである。むしろ評者なら、Galileo Galilei が、誰にも先んじて緊急に発表しようとした、遠く北方のオランダから伝わって来た情報に元に、自分で試作した望遠鏡という《新発明》による、天上界という別世界における《大発見》、すなわち、完全存在であるはずの月の表面に地上と同様に存在する高い山と深い谷、土星の周りを周回する４個の衛星[1]（土星の月)、肉眼では判別することのできないおびただしい数の星々（銀河を構成する恒星群）など驚異の発見を報告する、科学史上もっとも重要な歴史的な文書 ***SidereusNuncius*** [2]にたとえられるべき、数学教育の方法に関する《大発明がもたらした大発見の緊急報告》だからである。

遠隔教育体制ではじめて《発案》された、いわゆる講義後の『課題の提示』→「レポート提出」 → 『詳しい標準解答／解説の提示』→「レポート再提出」（『』は教員から、「」は学生から発せられる情報）という４過程からなる、著者の考案

[1]今日ガリレオ衛星と呼ばれる巨大な衛星

[2]わが国では、岩波文庫以来**『星界の報告』**と訳されて来ているが、ラテン語を直訳すれば、英語なら *“Sideral Messenger”*、日本語なら『星々からの伝令者』というところであるが、ガリレオ自身の意図を汲んで英語圏では *“Starry Message”* などと意訳されている。日本語なら『星々のメッセージ』、さらに意訳を許してもらえば『星明りで聞こえる伝令』というところであろう。

した数学教育の新しい方法は、これまで実現困難と諦められて来た、**学生に対する現代数学の思想と方法の教育**が可能になるという《大発見》へと導いた。評者自身も同じ学生のいくつもの２重レポートを読んで心が突き動かされた。

一般には、馬鹿げた “二度手間” と映るであろうプロセスを通じて、まさに、吸気 → 圧縮 → 爆発 → 排気 という４サイクルエンジンにおける、シリンダー内のピストンの無駄な重複に見える往復運動に、蒸気機関（外燃期間）にはなかった、超低速運転から超高速運転までの瞬発的で滑らかに変化する馬力、言い替えれば、その瞬間的な変化への機動性と広いレンジの持久力を両立させる内燃機関の秘密があったかのようである。

上に引用した査読者の意見にもあるが、学生の側からの自発的な反応を引き出すためのインセンティブである評価の基準を、学生が陥っている「正解か否か」という単純素朴な正解主義を最初に否定して、「主観的な評価である」という無責任な批判に臆することなく、「いかに自分自身で深く考えたか」を問う、あるいは「自分が分かっていなかった点を明確化できたかどうか」を問う、という、極めて斬新で、分かる人から見れば決して主観的ではない、いわば《数学的な共同主観》（哲学者なら《間主観性》というところである）に基づく評価基準の提示を通じて、つい数カ月前まで、高校までに教育にどっぷり浸かっていたはずの、「日本の勉強しない大学生」を、現代数学的な思索の必然性へと導くことに成功していることは、「凄い！」という感嘆の言葉しか思い当たらない。

査読者から、

- 講義のビデオの内容はすべて手書きで iPad に書きながら，説明されているようにも読めたので、もう少し説明をして頂きたかった.
- 2 回目のレポートを出す前に，1 回目のレポートを採点結果は伏せたのかどうか、明確にして欲しいと思った。正解、コメントは、プリントだけで、オンライン講義はしたのかどうかという点も明確にして欲しいと思った。

という意見が出ているように、方法論的な考察へと結晶化させる昇華的な推敲の余地など、技術的な改良点は残されているであろうが、**本論考が、世界の大学レベルの数学教育において、日本から発信するに値する画期的な論考であることは疑い得ない**。

「学生の側から見たときのオンライン授業という非常事態？対応」

日本大学文理学部 4 年 矢部千尋

1 はじめに

本稿は, 新型ウイルスの蔓延により急な遠隔操作を余儀なくされたこの世の中において, 私の所属する研究室の先生である山浦義彦先生が, この遠隔下において 1 年間授業を行ってきた経験から " 遠隔授業を余儀なくされた教員側の実践報告 " として論考を寄せられるということで, 長岡亮介先生から「学生側からのオンライン授業についての見解を書いてみないか」というお話をいただき, 執筆させていただくこととした. 私は現在大学 4 年生で, 週に 3 つの授業を受けている. 私はこの一年間, 遠隔下で授業を受けてきて, オンライン授業がなされることによって 1 年前には想像も出来なかった「奇跡」とも呼べるようなことが実現している. さらには, 山浦義彦先生の " 遠隔下 " での講義方法にはただただ敬服するばかりである. 一方で, オンライン授業になったからといって, 何かが良くなったというわけではない授業があることも事実である. むしろこのような授業の方が多いであろう. 遠隔授業を余儀なくされたことによって, 多くの教員が学生には分からない, 計り知れない苦労をされていることであろうというのは重々承知の上ではあるが, あくまで学生側からの見解ということで, いち学生として感じたことを述べさせていただくこととする.

2 オンライン授業による恩恵

前節で述べた, オンライン授業によって実現した「奇跡」というのは, 週に一度行われる私たちの研究室のゼミナールに長岡亮介先生, 谷田部篤雄先生らがご参加くださっていることである. このゼミナールは, 山浦義彦先生, 長岡亮介先生, 谷田部篤雄先生, 山本優希先生と, もう一人日本大学文理学部の先生にご参加いただいており, 発表者は私たち山浦研究室の学生 4 人のみというとても手厚いゼミナールである. 毎週発表し, 先生方からたくさんのご指摘をいただくことによって自分の理解の浅さに気付き, また, 自分では考えつかなかったような発想のヒントになるようなことを与えてくださる. そして, ご指摘いただいたことについてさらに自分で考える, という繰り返しである. このようなゼミナールは, 自分の " 考え抜く力 " を育てることに繋がっていると確信している. 私がこのゼミナールを, オンライン授業によって実現した「奇跡」と呼ぶ理由は, もし対面であれば, ご多忙のお二人と毎週同じゼミナールに参加することは不可能に等しいと考えるからである. (特に谷田部篤雄先生は茨城県の学校で働かれているので物理的にも厳しい面がある.) さらにオンラインの優れているところは, レコーディング機能である. 私は恥ずかしながら, 人が話している内容をその場ですべて完璧に理解するという能力が人より欠けていると自覚しており, 実際にゼミナールで質問や説明をされてもその場ですぐに理解できないということも少なくない. また, 言われたことをメモしきれずに後で思い出せないということもしばしばある. そのような問題を解決してくれたのがレコーディング機能である. これはあとで何度でも見返せるため, その場で聞き取れなかったことや理解できなかったことがあっても, 全く同じ内容を見返すことができる. 実際にその動画をあとでゆっくりと見返した時に「その時の自分はこの言葉を聞いて理解できていなかったけれど, 本当はこのような内容を伝えようとしてくれていたのか」と気づかされたこともある. 以上の点において, 私はオンライン授業のありがたみというものを感じている. 実際このようなオンライン授業がなければ, 私は対面では, 長岡亮介先生, 谷田部篤雄先生ともに 2 回ずつしか直接お会いしたことがなく, ここまで関われること

も, もしかするとなかったのかもしれないと思うことがある. もしそうであれば, 八月の TECUM 研究会での発表も経験できていなかったかと思うと, 色々と人生が変わっていたであろう. そういう意味でも, オンライン授業という対応は私にとって恩恵を与えてくれるものであった. この論考を良い機会に, 長岡亮介先生, 谷田部篤雄先生に日頃の感謝を伝えさせていただくこととした.

3 遠隔下において教員に求めること

まず初めに, 山浦義彦先生の " 遠隔下 "での新しい講義方法について触れさせていただきたい. 山浦義彦先生は, 遠隔授業を余儀なくされてから, " 遠隔ならではの授業はできないか "と考えた結果, 従来の試験制度を中止しレポート課題に変え, すべて一から新しくプリントを作成された. 課題は 2 段階の提出となっており, まずは自力で解いたものを提出. 次に解答例と自身の解答を比較して, 自分の理解について分析するというものである. また, 採点基準として, 正答率ではなく " どれだけ考え抜いたか " などが挙げられている. 実際に山浦義彦先生が作成したプリントを拝見したが, 問題の内容はノウハウで解けるものではなく, 本当に深く考えなければ解けない内容であった. また, 解答例は丁寧すぎるほどに丁寧であった. このようなプリント (100 ページほどある) を作成する作業は, 相当な時間と体力を要するものだということは想像に難くない. この 1 年間で, 遠隔授業を余儀なくされて, これほどまでに努力をされた教員はほかにいるのであろうか? とさえ思うほどである. この授業方法は, やる気のある学生にとっては本当にためになる授業であると感じるのと同時に, この授業を受けた (少なくとも一部の) 1 年生は, 前節で述べた " オンライン授業による恩恵 " を感じられたのではないかと思う. 一方で私は, ゼミナール形式でない, 多くの大学生が受けるような大人数の授業は, 前期に 70 人程度, 後期に 30 人程度の教職科目をそれぞれ一つずつ受けていた. 授業の方法としては, 両者とも双方向型の授業で, 常に学生は音声とビデオがオフの状態で先生の話を聞くというものだった. 後期の方はグループワークも 3 回ほど行われた. それぞれの授業の課題は, 前期の方は毎週あったかどうか記憶が曖昧であるほどあまり印象にない. (私の記憶力に問題がある可能性もある) 後期の方は, 毎週用意された 20 分程度の動画を視聴し, その動画内で与えられたテーマについて 200 字程度で書いて提出するというものである. 提出すれば 5 点がもらえる. それらの授業を受けての実直な感想は, " 対面授業となにも変わらない " つまり, 対面で講義を受け, 与えられた簡易な課題を提出することと何も変わらず, オンラインならではの何かを感じることはできなかったということである. それに加えて, 授業自体にあまり興味が湧かず家でパソコンを開いて授業を受けるその時間がもったいないと感じてしまい, 毎週の課題も, あくまで単位をとるための課題提出に過ぎなかった. 私の友人の話では, 隔週で課題を出すだけ, 資料を提示するだけで半年を終えた先生もいたそうである. その授業の学生の人数が多くなればなるほど教員の負担は大きくなり, その分遠隔授業に対応することも難しくなっていくであろうが, ここで学生としてオンライン授業に対して一つ贅沢なことを言わせてもらうとすれば, 遠隔下での授業を余儀なくされた今, 教員には " オンラインならではの, オンラインだからこそできる授業 " をやっていただきたい. そして, その授業を受けた学生が「この授業を受けて本当に良かった」と思えるような授業であれば, それが理想的な授業ではないかと考える. 本節の前半で述べた山浦義彦先生の講義方法は, その授業を受けた生徒からの感想レポート[1] にも「数学という学問を本当の意味で知ることが出来た, 山浦先生に教えていただき本当に良かった」とあるように, オンラインだからこそできる授業をなさり, そして生徒からの評価を得ている授業と言えるのではないか. (または, 少なくともそのような努力はなさっていると言えるであろう.)

[1]TECUM 2 月号 p 11 の「高校から大学への飛躍を学生に誘発する自己反省型の数学レポートのシステム」に載っている.

4 結論

私自身, 既に述べた通りオンライン授業という対応には感謝している部分がある. むしろ, 今までの人生の中で最も幸運なことのひとつであると思っている. しかし, 多くの人がこのようにオンライン授業にありがたみを感じているとも思えない. 例えば, もし新型ウイルスの流行が 1 年早かったならば, 私はまだ山浦研究室への所属が決まっているだけの状態で, 大学数学も (本当の意味で) ほとんど勉強したことがなく, 研究室の勉強についていけるのかとても不安な春休みを送っているところであった. 山浦義彦先生との関係性も今ほどあったわけではなく, 長岡亮介先生のことはご存知なかった. さらに, 卒業するために必要な単位数もまだまだ足りなかったため 1 週間に受けなければならない授業数も多かった. こんな状態で 1 年間オンライン授業となって, さらにその授業が楽しくないものであれば, 今みたいに " オンライン授業の恩恵 " などとは言っていられないのではと想像がつく. オンライン授業となったタイミングに, ただただ運が良かったと思うばかりである. そういう意味も込めて, オンライン授業に不満がある人は多いと考えるのだが, 大切なのは, オンライン授業を受けてきた学生から「今年はオンライン授業でつまらなかった」ではなく, 「むしろオンライン授業で本当に良かった」という言葉を引き出すために, 教員は " オンラインでしかできない授業 " を求めて何かしらの努力をすることではないか, というのが私の意見である. 最後にもう一度述べるが, 本稿はあくまで学生側の見解として教員に向けて少し贅沢な欲求を述べさせていただいたものである.

謝辞

本稿でも述べたオンライン授業の恩恵とも呼べるゼミナールは, 長岡亮介先生と山浦義彦先生の信頼関係の下に成り立っているものだと理解している. このような環境を作っていただき, またお忙しい中, 週に一度私たちのために時間を割いてくれている長岡亮介先生, 山浦義彦先生, 谷田部篤雄先生をはじめとする, このゼミナールにご参加くださる先生方に心より感謝申し上げたい.

矢部千尋著
「学生の側から見たときのオンライン授業という非常事態？対応」について

日本では、「オンライン授業では生徒に気の毒である」という教育評論家、教育関係者が少なくないが、小学校から、中学、高校、そして大学と学習者の年齢と学習内容のレベルが上がるほど、重要な点が、単なる基礎知識、基本技術を習得すること自身から、《いかにして基礎知識を習得するか》を学ぶこと to learn how to learn へと移行することに注意する人は残念ながら少ない。知育偏重を「嘆く」声は大きいが、**知育にさえ成功していない日本の学校教育**の現状は、国際的にみると、特に西側の先進国には「極東の不可思議な島国の神秘」である。

本論考は、日本大学文理学部数学科の山浦義彦教授の下で関数解析を基礎から学ぶ筆者が、多感な女子学生らしい初々しさで、大学で実際に実施されたオンライン授業に対する率直な感想を、大胆な疑問提起を交え述べたものである。

評者のように過去の話となっていても、一般の大学教員にはさぞかし「耳に痛い」ところであろうと思う厳しい指摘が随所にある。

硬直した制度の持つ必然的な欠点とそれを克服するための日常的な努力の成果の違いが、これほど決定的に差を拡大して現れるのが「非常事態の特徴」なのであろうか。まさに政治家の聡明さの違いが決定的に出ている世界の Covid-19 禍中であるだけに、大学の教員の質の違いというだけでは済まない、深刻な問題提起を含む。

「このような生意気な発言」をエンカレッジする教育は、かつてのわが国では、「怠慢な学生を育成する甘やかしである」と批判される傾向がなかったとはいえない。それが実際は、社会的偏見、社会的差別を正当化する「論理」とパラレルなものに過ぎなかったことも本論考は示唆してくれる。

いわゆる謝辞の部分を全部削除して、全大学教員に読ませたいとつくづくに思う。

PH7

コロナ禍における中高の現場での「評価」に関する報告

2020 年 3 月の突然の一斉休校要請，そして 4 月に発出された緊急事態宣言。学校現場では，さまざまな問題が噴出しました。中でも，とりわけ遠隔授業体制が長引いた学校で最も苦慮されたであろう問題のひとつが

平時のように，教室でのペーパー試験ができない中で，
どのように評価・評定をおこなうか

ではないでしょうか。

そこで今回，3 名の中高の現場の先生方に，このコロナ禍でいかなる授業をおこなったか，そして評価・評定をどのようにおこなったかを，その反省や考察と合わせて報告していただきました。

こうした状況だからこそ，そもそも評価とは何か，いかなる目的で，いかなる方法でおこなうものなのか，と根本に立ち返って考察する機会にできれば幸いです。

機関誌委員会　松並奏史

第II部

寄稿

街を彩る曲線

平尾 淳一

概要

街中の建造物にみる曲線を分析した．構造に関わらない装飾的なものに曲線が用いられることが増えたように感じられる．

■建物の形　以前の研究会（第 2 回研究会 2018 年 5 月 13 日）では主として自然の地形に見られる曲線をとりあげた（☞「風景の中の指数関数」）．今回は人工的な建造物に曲線を探してみたい．図 1 は有名なコロッセオの写真である．正式名称はフィラウィウス円形闘技場というそうであるが，円形ではなく誰もが想像するように楕円形になっている．図中の赤い曲線は適当なパラメタをもちいて描いた楕円である．

図 2 は以前にも取り上げた横浜ランドマークタワーである．この建物の指数関数的な形が力学的な考察から導かれたものであることはそこで示されたとおりである．

図 1　コロッセオ

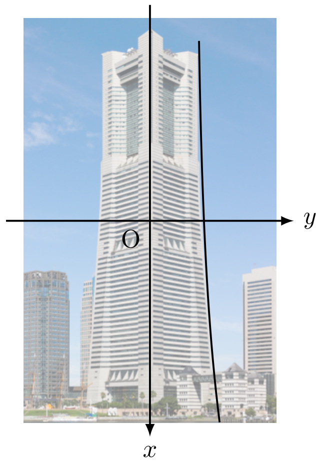


図 2　横浜ランドマークタワー

■装飾的な建物　これに対して近年曲線を大胆に取り入れた装飾が用いられた建物が目立つようになって来ている．以前に紹介した図 3 の建物は波動をイメージさせる．位置 x，時刻 t における変位 $y(x, t)$ が

$$y(x, t) = \cos 2\pi(ft + x/\lambda) \tag{1}$$

と表されるとき波動は $-x$ 方向に進行する（波長 λ，振動数 f）．

図 3 において建物の上から下向きに x 軸，水平方向に t 軸をとれば，時間 t とともに波動が進行する様子をこの建物の形状から感じることができるだろう．しかしよく見ると最上部の稜線は直線的になっている．最上部を $x = 0$ とすれば式 (1) より $y(0, t) = \cos 2\pi ft$ となるから，この建物の壁面を表す式は

$$y(x, t) = \cos 2\pi(ft + x/\lambda) - \cos 2\pi ft \tag{2}$$

となる．

図 3　V88 ビルディング（銀座 2 丁目）

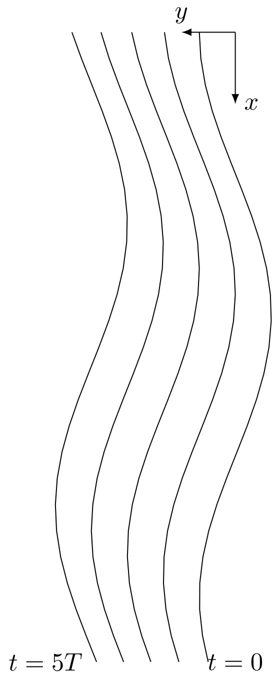


図 4　進行波のイメージ

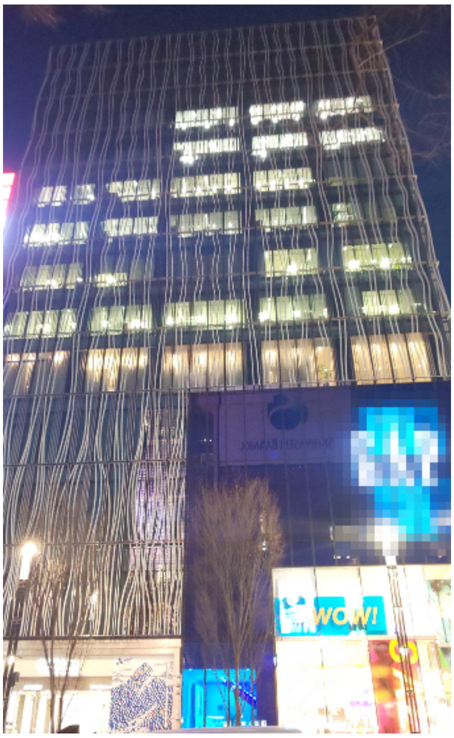


図 5　ヒューリック銀座数寄屋橋ビル（銀座 4 丁目）

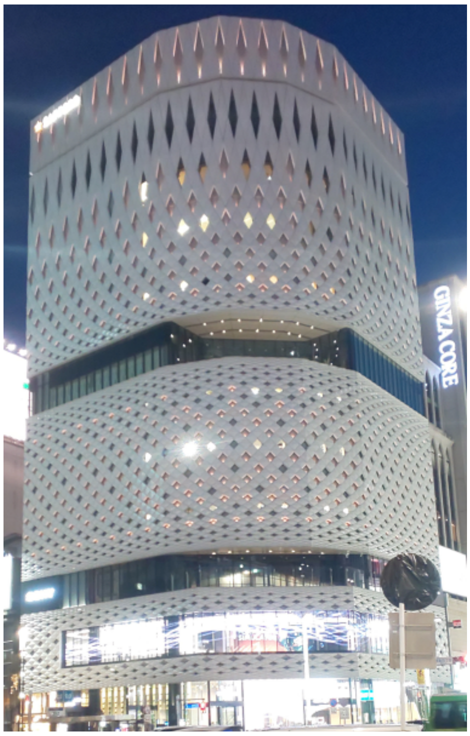


図 6　NISSAN CROSSING（銀座 5 丁目）

図 5 のビルの表面にも三角関数らしき曲線の装飾が施されているが，数学的な関係ははっきりしない．それに対して図 6 の方は比較的わかりやすい．白い壁面の部分が 3 層にわかれている．上から見ていこう．この部分は指数関数 $y = \exp(\pm x)$ のグラフを x 軸方向に $n(= 0, 1, 2, \cdots)$ だけ平行移動した曲線群

$$y = \exp\{\pm(x - n)\} \tag{3}$$

で表されるようにみえる（図 7）．下 2 層はいずれも三角関数のグラフを同様に平行移動して重ね合わせて再現できる（図 8）．

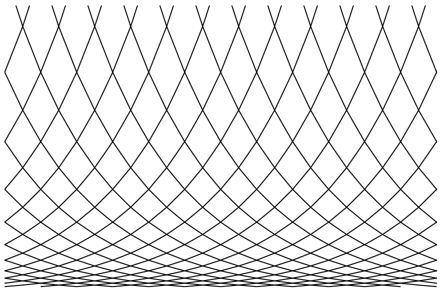


図 7　指数関数

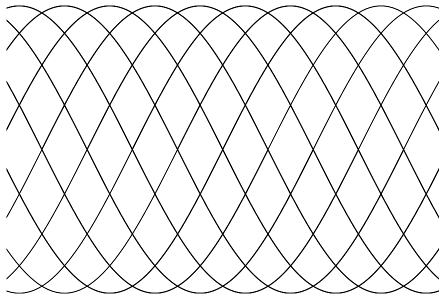


図 8　三角関数

最後の例は図 9 である．下部は平面的であるが，上部にいくにつれて凹凸が現れる．そのパターンは単純な三角関数でないことは最上部の稜線を見れば明らかである．これはなかなか手強い．実際にどのように設計されたのかはわからないが，ここで思いつくのはソリトンである．

非線形効果と分散をもつ波動の方程式に kdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{4}$$

がある．kdV 方程式の数値解としてザブスキーとクルスカルのものが知られる．時刻 $t = 0$ における波 $(u = \cos\pi x)$ が時間の経過とともにその波形に歪みを生じ，時刻 $t = 1/\pi(= T_{\mathrm{B}})$ には $x = 0.5$ 付近に幅の狭い振動が現れる．さらに時間が経過すると，これらの振動が成長し，それぞれ異なる速度で伝播する．時刻 $t = 3.6T_{\mathrm{B}}$ にはこれらがほぼ等間隔に並んでいることが確認できる．この様子を示したものが図 10 である．ここで時間軸を図 9 の高さ方向に見立てると共通したものが感じられるだろう．

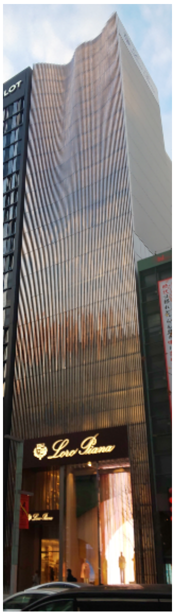


図 9　ロロ・ピアーナ（銀座 3 丁目）

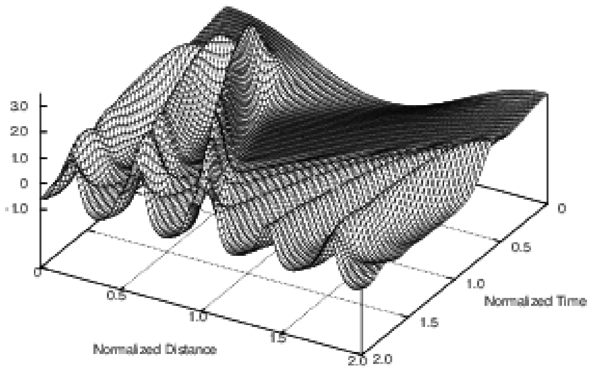


図 10　ザブスキーとクルスカルの数値解

第III部

論稿

変換 $(x+y, xy)$ の基本的な大域的考察

松並 奏史

変換 $(x+y, xy)$ は解析幾何の定番の題材としてよく取り上げられる。しかし，高校数学で扱われる他の種々の変換とはその性質が大きく異なっており，それが平面にどのように働いているかが掴みにくい。そこで本稿では，この変換が，平面に対して大まかにどのように働くか，すなわちその大域的な振る舞いを考察し，最後に直線がどのような図形に移されるかを一般的にまとめてみたい。

1　高校数学の変換各種

座標平面上の点 (x, y) が $x^2+y^2 \leq 1$ を満たしながら動くとき，点 $(x+y, xy)$ が存在する範囲を求めよ。

この問題は，ほとんどの参考書に掲載される解析幾何の定番の問題として扱われている。教科書では，そもそもこうした

$$\begin{cases} X &= f(x, y) \\ Y &= g(x, y) \end{cases}$$

という座標平面上のすべての点を移すような見方，いわば xy 平面から XY 平面への**変換**としての見方が明確に打ち出されることはほとんどないが

- 「曲線の平行移動」として《平行移動》
- 「ある直線に関して対称な点を求める」として《対称移動》
- 「定点と図形上の点を結ぶ線分の分点の軌跡」として《相似変換》
- 複素数平面での積の図表示の応用として《回転》

が取り上げられている[1]。

しかし，これら教科書で取り上げられている基本的な変換と，上の問題で論じられている変換が決定的に異なるのは，x, y について一意に解くことができないこと，すなわち**逆**

[1]複素数平面では，「研究」などのような形で《反転》まで取り上げられることもある。

変換が存在しない点にある。したがって，「定点と図形上の点を結ぶ線分の分点の軌跡」を求めるときなどのように

1. x, y について解く

2. もとの図形の方程式に代入する

のような単純な方法[2]で解くことができず，一般には次のように解くことになる。

$X = x + y, Y = xy$ とおく。このとき，これらをともに満たす x, y が実数の範囲で存在するための X, Y に関する条件は，t に関する 2 次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0$$

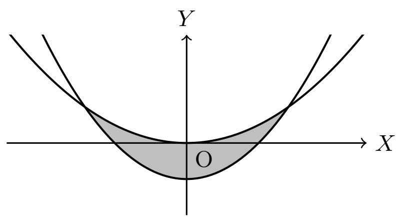
が実数解をもつ条件と同値であるから

$$X^2 - 4Y \geq 0 \quad \cdots\cdots(1)$$

である。また，x, y に関する条件 $x^2 + y^2 \leq 1$ は $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ より，X, Y に関する条件

$$X^2 - 2Y \leq 1 \quad \cdots\cdots(2)$$

と書き換えられる。したがって，求める領域は (1), (2) の共通部分である。



このような解法は「定点と図形上の点を結ぶ線分の分点の軌跡」を求めるときなどの逆変換を利用した解法と違い，変換後の点 (X_0, Y_0) が変換前はどのような点であったかが明

[2]長岡先生のご著書で明快に語り尽くされているため，ここでそれを繰り返すのは気が引けるが，自分の理解が正確かを確認するためにも，その解法を支える論理について触れておく。もとの図形を C とすると，求めるのは

$$\exists x, y \in \mathbb{R}\,((x, y) \in C \ \land \ X = f(x, y) \ \land \ Y = g(x, y))$$

という X, Y についての条件と同値な，X, Y に関する方程式である。したがって

$$X = f(x, y) \ \land \ Y = g(x, y) \iff x = h(X, Y) \ \land \ y = i(X, Y)$$

となる $h(X, Y), i(X, Y)$ を求めることができれば，C を表す方程式に代入するだけでよいことになる。

らかでない。つまり，**この変換が xy 平面に対してどのように作用しているのかが掴みにくいのである。**

そこでこの変換の大まかな振る舞いに関する特徴を明らかにしてみたい。

以下，xy 平面上の点 (x, y) を XY 平面上の点 $(x + y, xy)$ へと移す変換を $F(x, y)$ と書くことにする。

2　不動点・対称性

まず，変換 F により動かない点，すなわち不動点を考えてみる。これは

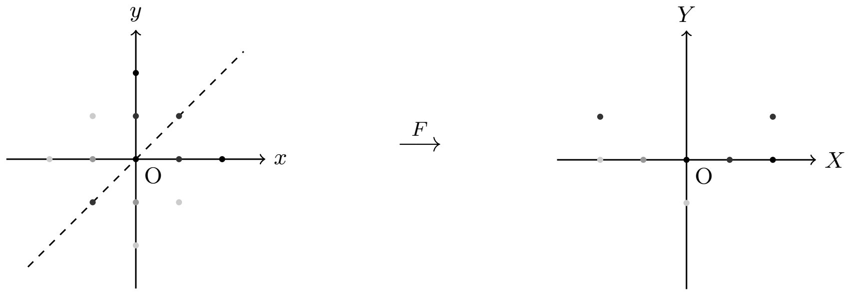
$$\begin{cases} x &= x + y \\ y &= xy \end{cases}$$

を満たす (x, y) であるから，原点 $(0, 0)$ と x 軸上のすべての点 $(a, 0)$ が不動点である。

また，式の形から，直線 $y = x$ に関して対称な点は同一の点に移ることもわかる。

したがって，x 軸上のすべての点が不動点であるとはいえ，変換 F により点 $(a, 0)$ へと移る点は点 $(a, 0)$ 以外にも点 $(0, a)$ があるとわかる。

色の区別ができずわかりにくいかも知れないが，いくつかの点をプロットして変換の様子を以下の図に表してみる。



3　軸や境界線の逆像

不動点や対称性といった変換の基本的な性質に続けて，大域的な性質に関する考察を進めてみる。

不動点と対称性の考察により，変換後の X 軸は，もとの x 軸と y 軸を縮尺を変えずに重ねたものと考えられる。つまり，XY 平面上の点 $(a, 0)$ は，xy 平面上の点 $(a, 0)$ と $(0, a)$ の移る点である。一般に，変換後の XY 平面における図形 C に対して，その図形 C へと移る変換前の xy 平面上の図形 C' を**逆像**という [3]。この言葉を使えば，XY 平面上における X 軸の逆像は，xy 平面の x 軸と y 軸ということになる。

[3] 正確に書くと，次のようになる。

$$(x, y) \in C' \iff \exists\, X, Y \in \mathbb{R}\ \ ((X, Y) \in C \land X = x + y \land Y = xy)$$

また，最初の問題に対する解答で見たように，XY 平面においては

$$X^2 - 4Y \geq 0$$

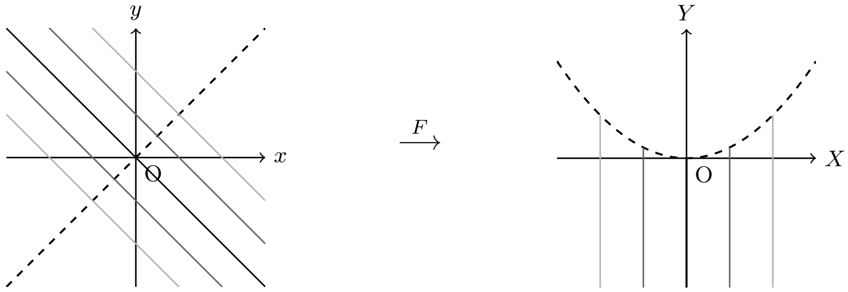
を満たす点でないと，その逆像が xy 平面上に存在しない。そこで，この境界線 $X^2-4Y=0$ の逆像を考えてみる。境界線を l とし，その逆像を $F^{-1}(l)$ とかくと，点 (x, y) が図形 $F^{-1}(l)$ 上にあるための条件は点 $(x+y, xy)$ が l 上にあることであるから

$$(x+y)^2 - 4xy = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \iff x - y = 0$$

より，逆像 $F^{-1}(l)$ は直線 $x - y = 0$ であることがわかる。

次に，Y 軸の逆像を求める。Y 軸は $X = 0$ と表されるから，求める逆像は直線 $x+y=0$ であることがわかる。同様に Y 軸に平行な直線 $Y = a$ の逆像が直線 $x + y = a$ となることもわかる。

以上から，おおむね次のような変換の様子が見て取れる。



図を見ると，変換 F は，xy 平面を，直線 $y = x$ を軸にしてまず折り畳み，直線 $x+y=0$ が Y 軸に重なり，かつ x 軸の $x \geq 0$ の部分（つまりこれは y 軸の $y \geq 0$ の部分でもあり）と y 軸の $y \leq 0$ の部分（先と同じ状況）が X 軸に重なるような形で，折り目の直線 $y = x$ の両端をグイと上げてこれを放物線 $X^2 - 4Y = 0$ に重なるようにする変換であることがまずわかる。

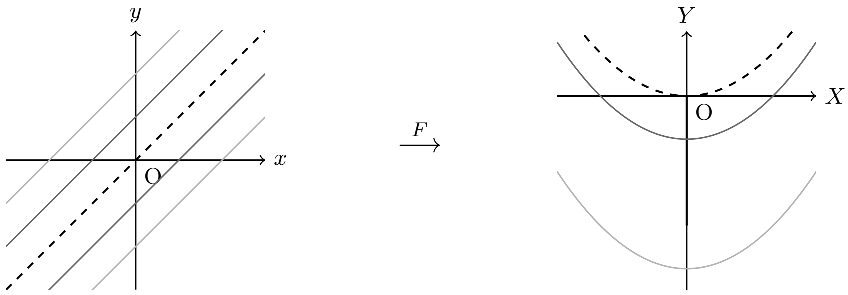
4　直線の移る図形

先の考察で見たように，変換 F では，直線 $y = x$ が放物線 $X^2 - 4Y = 0$ に移るため，直線 $x + y = a$ が Y 軸に平行な直線に移るように，直線が直線に移ることは例外的な現象で，一般に直線という形状を保たない。では，一般に直線はどのような図形に移るのだろうか。まず境界線となる直線 $y = x$ に平行な直線がどのような図形に移るかを考える。

前節の最後に述べた変換 F の全体的な様子から，曲線 $X^2 - 4Y = 0$ と同じく頂点を Y 軸にもつような放物線に移ると予想できる。実際，直線 $y = x + a$，すなわち $x - y = a$ は

$$(x-y)^2 = a^2 \iff (x+y)^2 - 4xy = a^2 \iff X^2 - 4Y = a^2$$

であるから，放物線 $X^2 - 4Y = a^2$ に移る [4]。

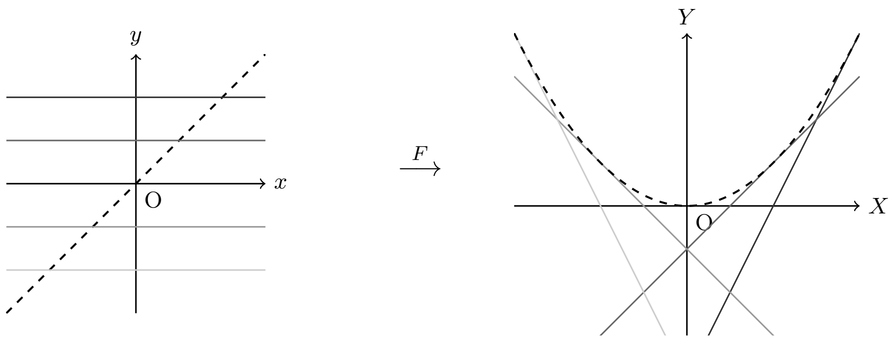


図を書いてみると，もともと等間隔であった直線群において直線 $y = x$ から離れるほど，変換後に境界線 $X^2 - 4Y = 0$ からより遠い放物線に移されていることが読み取れる [5]。

次に，x 軸に平行な直線 $y = a$ がどのような図形に移るかを考える。点 (x, y) が直線 $y = a$ 上を動くとき，変換後の点 (X, Y) は

$$\begin{cases} X &= x + a \\ Y &= ax \end{cases}$$

と表され，直線 $Y = aX - a^2$ 上全体を動くことがわかる。



変換後の直線 $Y = aX - a^2$ は境界線 $X^2 - 4Y = 0$ と接していることが見て取れ，実際，これらの式を連立することで一般に点 $(2a, a^2)$ を接点とすることがわかる。さらに，境界線 $X^2 - 4Y = 0$ 上の任意の点 $(a, \frac{1}{4}a^2)$ における接線について，それが $Y = \frac{a}{2}X - \frac{a^2}{4}$ と表されることから，その逆像として直線 $x = \frac{a}{2}$（と $y = \frac{a}{2}$）が得られることがわかる。すな

4「式の両辺を 2 乗する」変形をしたが，この方法については後に少し詳しく触れる。

5 この変換のヤコビアンが $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$ となることから，直線 $y = x$ から遠いほど平面が引き延ばされることがわかる。

わち，x 軸に平行な直線群の変換後の直線群は，境界線 $X^2-4Y^2=0$ の**包絡線**となることがわかる。

さらに，変換前後で**交点の様子**が異なっている点にも着目したい。例えば，xy 平面では対称軸 $y=x$ と x 軸に平行な直線 $y=a$ は単に交わっていただけだが，XY 平面ではそれらの変換後の図形は接している。では，他に xy 平面で対称軸 $y=x$ と交わる直線はどのような図形に移るのだろうか？

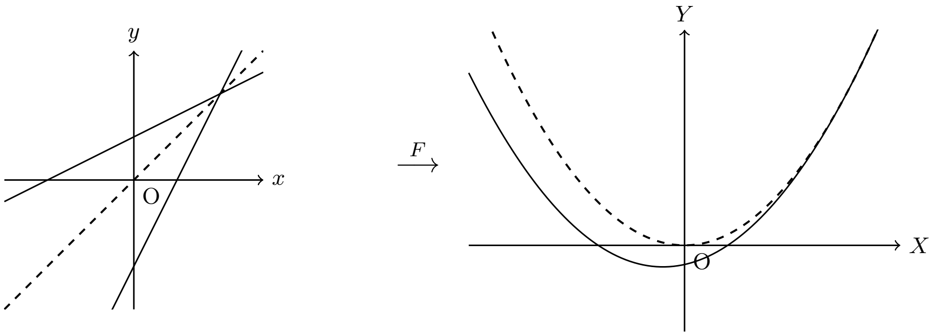
そこで例えば直線 $2x-y-2=0$ の変換後の図形を求めてみたい。しかし，これまでのように変換前の図形の方程式 $f(x,y)=0$ において，$f(x,y)$ が x,y に関する対称式になっていないため，「対称式を基本対称式で表す」というような式変形ができず，変換後の図形を求めることが困難に思える。そこでこの変換が**直線 $y=x$ に関して対称な図形は同一の図形に移す**という点に着目すると，図形 $f(x,y)=0$ が移る図形は，これと直線 $y=x$ に関して対称な図形 $f(y,x)=0$ が移る図形と同一であることがわかる。したがって

$$f(x,y)=0 \ \vee \ f(y,x)=0 \quad \Longleftrightarrow f(x,y)f(y,x)=0$$

より，**対称式で定義される図形 $f(x,y)f(y,x)=0$ の移る図形**もまたこれと同一であるため，この対称的な図形を考察すればよいことになる（ちなみにこれは先ほど直線 $y=x+a$ の移る図形を考察する際に取った方法でもある）。よって，直線 $2x-y-2=0$ の変換後の図形が

$$(2x-y-2)(2y-x-2)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2X^2-2X+9Y+4=0$$

より，放物線 $-2X^2-2X+9Y+4=0$ となることがわかる。



この場合にも，変換前には交わる 2 直線だったものが，変換後には接する 2 つの放物線になっている。このことは一般に，**対称軸 $y=x$ との交点，すなわち 0 次接触（1 点接触）していた点が，変換 F の「$y=x$ で折り返す」作用により接触の次数が 1 次へと高次化（2 点接触）し，接点になった**と考えられそうである。この数学的には精密性を欠いた主張について丁寧な議論が必要だが，私自身が深く考察できていないので，今後の課題としたい。

本節の最後に，一般の直線 $ax+by+c=0$ の移る図形についてまとめておく。単なる式の計算により

$$(ax+by+c)(ay+bx+c)=0 \iff abX^2+(a+b)cX+(a-b)^2Y+c^2=0$$

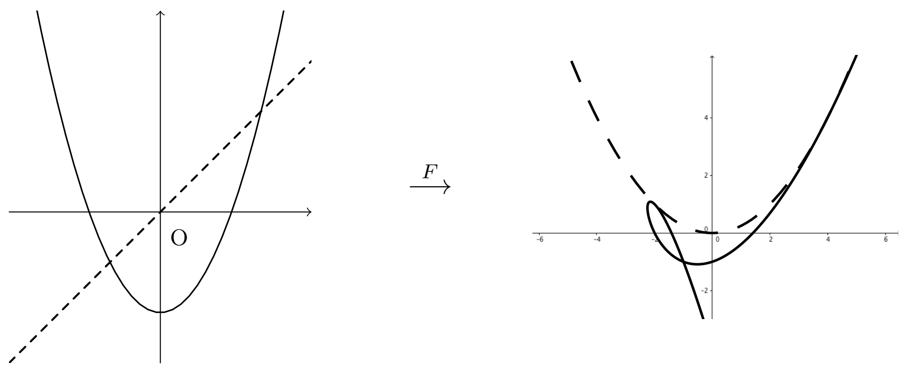
となることがわかる。したがって

1. $a=0$ または $b=0$ の場合は，（軸に平行でない）直線に
2. $a=b$ の場合は，Y 軸に平行な直線に
3. それ以外の場合は，Y 軸に平行な直線を対称軸とする放物線に

それぞれ移るとまとめることができる。

5　最後に

本稿では，対称性に着目しつつ，変換 F の大域的な性質，とりわけ《直線をどのような図形に移すか》を概観してきた。その考察のなかで，対称軸である直線 $y=x$ との交点が，変換後には境界線 $X^2-4Y=0$ との接点に変わることがわかり，いわば《接触》という局所的な性質に関する問題も浮上した。前節では直線に関してそれらの交点が接点に変わる様子を見たが，例えば放物線 $y=x^2-2$ についても下図のように，対称軸 $y=x$ との交点が接点に変わる[6]。



さらには，もとの図形が直線 $y=x$ に接するような場合はどうなるのだろうか。こうした問題に関するより精密な考察を今後の課題としたい。

[6]ちなみにこの変換後の図形は 3 次曲線 $-x^3-2x^2+y^2+3xy+5y+2x+4=0$ である。

松並奏史著「変換 $(x+y,xy)$ の基本的な大域的考察」について

平面上の変換 $(x,y)\mapsto \boldsymbol{(x+y,xy)}$ はいまや日本の高校数学の関係者の間ではあまりに有名な話題であるが、これを理論的に理解してる人は必ずしも多くはない。その証拠は、これを扱っている多くの参考書、実戦問題集の記述を見れば明らかである。実際、その多くが、「点 $(x+y,xy)$ が、$R:=\{(x.y)\in E^2|x^2-4y\geq 0\}$ 内にある」という条件を「忘れずに一言付け足す」ことの「大切さを強調」する、という《基本的な論理矛盾》にさえ気づいていないことをすぐに見出すであろう。(いうまでもなく、ここで E^2 は 2 次元のユークリッド的平面を表す。)

本論考は、この変換に関する問題とその規範的な解答を示す、という巷間流布する「模範回答」「実戦演習指導」とは一線を画し、むしろその正反対に、高校数学におけるこの有名な変換が学習者のみならず教育関係者の間に誤解を普及させて来た根拠に迫り、学習指導要領からの乖離や逆変換の不在を指摘するとともに、逆変換のない場合にこそ意味を持つ逆像(原像)の概念に向かって、伝統的な「解答のテクニック」に依らないこの問題への新しいアプローチとして、不動点、線対称性から出発して、この線対称性の対称軸である直線($y=x$)の変換先が、変換の像(変換の値域)の境界線として登場すること、他の一般の図形 C とこの直線 $y=x$ とが、共有点を持つならば、C の像は、変換の値域の境界線と必然的に 1 次接触(2 点接触)するという発見的考察へと導いている。変換の大域的、基本的振る舞いを仔細かつ詳細に検討・調査する、という、数学を含め研究的世界ではもっとも標準的な方法が、このような平凡な話題でも極めて有効であることを示している。

また、対称軸に関して対称な 2 点が同一点に移されるという性質を利用すると、基本対称式では表現できない一般の多項式関数[1] $f(x,y)=0$ が表す図形 $\mathcal{F}$ に対しても、対称移動した図形が方程式 $f(y,x)=0$ で表されることを利用して、対称な多項式である $f(x,y)\times f(y,x)=0$ が表す図形に帰着する方法など、数学的に《華麗な技》も本論考の魅せどころの一つである。と同時に、「受験数学」という世界ともそれなりに長くつき合って来た評者のようなものは、「新パターンの難問の裏技」として登場しないかという杞憂も持つ。

なお、些細なことながら、1 次接触(2 点接触)が起こることは、筆者がここで敢えて否定している《局所的な考察》から容易に明らかにできると評者は思うが、それはさておき、得がたく、かつ、示唆に富んだ論考である。

PH7

[1] 当然有理式関数でも良い。

「3 次方程式」と「4 次方程式」のリゾルベントによる解法の違い

茗溪学園中学校高等学校 谷田部篤雄

ラグランジュが「方程式の代数的解法についての省察（Reflexions sur resolution algebrique des Equations)」(1770 年号と 1771 年号で 2 つの号に分けて発表）という論文の中で，当時分かっていた 3 次方程式，4 次方程式に関する様々な解法を吟味することで，「リゾルベント (分解式) と還元方程式」という一般的な原理を見出し，3 次方程式と 4 次方程式が代数的に解けることのア・プリオリな根拠を示した．しかしながら，「3 次方程式におけるリゾルベントによる解法」と「4 次方程式におけるリゾルベントによる解法」には，私からみると「大きな違い」があり，ラグランジュ自身は論文の中で，そのことに触れていない．本論稿では，この違いについて言及する．

1　3 次方程式におけるリゾルベントの解法

ラグランジュが論文を逐語的に訳しておっていくことは大変な苦労なので，まずは，彼のアイデアを現代的な表現を用いて整理することにする．

1.1　3 次方程式におけるリゾルベントの解法

3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

の解を x_1，x_2，x_3 とする．解と係数の関係から，

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b \\ x_1x_2x_3=-c \end{cases}$$

を得る．ここで，「x_1，x_2，x_3」のそれぞれに「1 の 3 乗根である $1,\omega,\omega^2$」を付け加えた次の式を考える．

$$R=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$$

この R に x_1，x_2，x_3 のすべての置換 (計 6 個) を施してみると，

$$\begin{aligned} &x_1+\omega x_2+\omega^2x_3 \\ &x_3+\omega x_1+\omega^2x_2 &&=\omega(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3) \\ &x_2+\omega x_3+\omega^2x_1 &&=\omega^2(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3) \\ &x_1+\omega x_3+\omega^2x_2 \\ &x_2+\omega x_1+\omega^2x_3 &&=\omega(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2) \\ &x_3+\omega x_2+\omega^2x_1 &&=\omega^2(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2) \end{aligned}$$

となる．この結果，R は 6 個の置換によって 6 種類の値をとることが分かるが，よくみると，上の三つの値と下の三つの値はそれぞれ，ω 倍，ω^2 倍の違いにすぎない．したがって，上の三つの式と，下の三つの式をそれぞれかけ合わせれば，

$$\begin{aligned} & (x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\cdot(x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2)\cdot(x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1) \\ = \ & (x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\cdot\omega(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\cdot\omega^2(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3) \\ = \ & (x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)\cdot(x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3)\cdot(x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1) \\ = \ & (x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)\cdot\omega(x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)\cdot\omega^2(x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2) \\ = \ & (x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)^3 \end{aligned}$$

という二つにまとまる．これは，

$$R^3=(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$$

が 6 個の置換によって，2 種類の値 $R_1=(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$，$R_2=(x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)^3$ しかとらないということを意味する．この R^3 のことをリゾルベントと呼び，R のことを「リゾルベントの元」と呼ぶことにする．

ここで登場した R_1 と R_2 を a, b, c で表すことができれば，1 の 3 乗根を利用して，$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ と $x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2$ の値を a, b, c で表すことができる．それぞれを r_1, r_2 とすると，

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=r_1 \\ x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}(-a+r_1+r_2) \\ x_2=\dfrac{1}{3}(-a+\omega^2 r_1+\omega r_2) \\ x_3=\dfrac{1}{3}(-a+\omega r_1+\omega r_2) \end{cases}$$

となり，解 x_1, x_2, x_3 を a, b, c と 1 の 3 乗根で表せたことになる．そこで，R_1, R_2 の値をもとめるという問題を考えることにする．R_1 と R_2 を解に持つ「二次の補助方程式」を考える．

$$(t-R_1)(t-R_2)=0 \iff t^2-(R_1+R_2)t+R_1R_2=0$$

ここで, 登場する R_1+R_2, R_1R_2 は当然, x_1, x_2, x_3 の対称式になっているため, 基本対称式 $x_1+x_2+x_3(=-a)$，$x_1x_2+x_2+x_3x_1(=b)$, $x_1x_2x_3(=c)$ によって次のように表すことができる．

$$\begin{cases} R_1+R_2=2(x_1+x_2+x_3)^3-9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+27x_1x_2x_3=-2a^3+9ab-27c \\ R_1R_2=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3=(a^2-3b)^3 \end{cases}$$

したがって，先ほどの二次方程式は

$$t^2-(-2a^3+9ab-27c)t+(a^2-3b)^3=0$$

となり，これを解くことによって，R_1 と R_2 の値が得られる．

1.2　2 次方程式におけるリゾルベントの解法

2 次方程式についても，3 次と同様のアイデアでリゾルベントを利用して解くことが出来る．

$$x^2+ax+b=0$$

の解を x_1，x_2 とする．解と係数の関係より

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases}$$

となる．「x_1，x_2」のそれぞれに「1 の 2 乗根である 1，− 1」を付け加えた $R = x_1 - x_2$ を考え，x_1，x_2 の置換を施す．

$$x_1 - x_2 x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2)$$

したがって，$R = (x_1 - x_2)$ として，$R^2 = (x_1 - x_2)^2$ とすれば，R^2 は x_1，x_2 の置換によって一種類の値しかとらないことが分かる．したがって，

$$R^2 = -(x_1 - x_2)^2 = -(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = -a^2 + 4b \iff (x_1 - x_2)^2 = a^2 - 4b$$

であるから，$R^2 = a^2 - 4b$ となり，$R(= x_1 - x_2)$ の値を「決定」することができる（r_1）とする．これを用いて，x_1，x_2 についての連立方程式を次にようにして解けばよい．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 - x_2 = r_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(-a + r_1) \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(-a - r_1) \end{cases}$$

2　2 次方程式と 3 次方程式におけるリゾルベントの解法の流れ

4 次方程式の議論に入る前に，2 次方程式と 3 次方程式のリゾルベントによる解法をまとめておくことにする．

3 次方程式のリゾルベントによる解法

1. x_1，x_2，x_3 の合計 6 個の置換で 2 種類の値しかとらないようなリゾルベントとその元を構成する（$R = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ と R^3）
2. 上の 2 種類の値 R_1，R_2 を解に持つ二次の補助方程式（その係数は a，b，c で表せる）を解く．
3. R_1，R_2 を利用して，x_1，x_2，x_3 を求める．

2 次方程式のリゾルベントによる解法

1. x_1，x_2 の合計 2 個の置換で 1 種類の値しかとらないようなリゾルベントとその元を構成する（$R = x_1 - x_2$ と R^2）
2. R を利用して，x_1，x_2 を求める．

この流れをふまえれば，4 次方程式に関しては，

4 次方程式のリゾルベントによる解法

1. x_1，x_2，x_3，x_4 の合計 24 個の置換で 3 種類の値しかとらないようなリゾルベントとその元を構成する
2. 上の 3 種類の値 R_1，R_2，R_3 を解に持つ三次の補助方程式（その係数は a，b，c で表せる）を解く．
3. R_1，R_2，R_3 を利用して，x_1，x_2，x_3，x_4 を求める．

となることが分かる．そして，2 次や 3 次の場合の様子をふまえれば，リゾルベントとその元になる式の候

補は，

$$R = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4,\ R^4 = (x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4)^4$$

であることが予想できる．しかしながら，ラグランジュが論文の中で省察した 4 次方程式の様々な解法の中では，これとは全くことなるリゾルベントが採用されている．

2.1 4 次方程式の解法に用いられる様々なリゾルベント

ラグランジュが論文の中で「フェッラリの解法」「デカルトの解法」「チルンハウスの解法」「ベズー，オイラーの解法」について吟味した．それぞれの解法で登場した「リゾルベント」について紹介する．

フェッラリの解法（ベズー，オイラーの解法もリゾルベントに関しては本質的には同じ）

$R = x_1x_2 + x_3x_4$ とすると，R は 24 個の置換で，3 種類の値

$$x_1x_2 + x_3x_4,\ x_1x_3 + x_2x_4,\ x_3x_2 + x_1x_4$$

しかとらない．よって，この R 自体がリゾルベントとなる．

デカルトの解法

$R = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ とすると，$R^2 = \{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)\}^2$ は 24 個の置換で，3 種類の値

$$\{x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)\}^2,\ \{(x_1 + x_3) - (x_2 {+}_4)\}^2,\ \{(x_1 + x_4) - (x_2 + x_3)\}^2$$

しかとらない．よって，R^2 がリゾルベントとなる．

チルンハウスの解法

$R = -\dfrac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$ とすると，R は 24 個の置換で，3 種類の値

$$-\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4},\ -\frac{x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 - x_4^2}{x_1 + x_3 - x_2 - x_4},\ -\frac{x_1^2 + x_4^2 - x_2^2 - x_3^2}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}$$

しかとらない．よって，この R 自体がリゾルベントとなる．

では，2 次や 3 次の場合と同様に「1 の 4 乗根」を利用してリゾルベントを構成した解法にラグランジュが言及しなかったのは何故なのだろうか．実際にその方法を試みることによって，その理由について考えていきたい．

3 論文で触れられなかった 4 次方程式のリゾルベントによる解法

3.1 1 の 4 乗根を利用したリゾルベントが上手くいかない理由

4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

の解を x_1，x_2，x_3，x_4 として，それぞれに「1 の 4 乗根である 1，i，i^2，i^3」を付け加えた次の式を考える．

$$R = x_1 + ix_2 + i^2x_3 - +i^4x_4 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4$$

この R に x_1, x_2, x_3, x_4 のすべての置換 (計 24 個) を施してみると，

$$\begin{array}{llll}
x_1+ix_2-x_3-ix_4 & i(x_1+ix_2-x_3-ix_4) & -(x_1+ix_2-x_3-ix_4) & -i(x_1+ix_2-x_3-ix_4)\\
x_2+ix_1-x_3-ix_4 & i(x_2+ix_1-x_3-ix_4) & -(x_2+ix_1-x_3-ix_4) & -i(x_2+ix_1-x_3-ix_4)\\
x_3+ix_2-x_1-ix_4 & i(x_3+ix_2-x_1-ix_4) & -(x_3+ix_2-x_1-ix_4) & -i(x_3+ix_2-x_1-ix_4)\\
x_1+ix_3-x_2-ix_4 & i(x_1+ix_3-x_2-ix_4) & -(x_1+ix_3-x_2-ix_4) & -i(x_1+ix_3-x_2-ix_4)\\
x_4+ix_3-x_2-ix_1 & i(x_4+ix_3-x_2-ix_1) & -(x_4+ix_3-x_2-ix_1) & -i(x_4+ix_3-x_2-ix_1)\\
x_1+ix_4-x_2-ix_3 & i(x_1+ix_4-x_2-ix_3) & -(x_1+ix_4-x_2-ix_3) & -i(x_1+ix_4-x_2-ix_2)
\end{array}$$

となる．この結果，R は 24 個の置換によって 24 種類の値をとることが分かるが，よくみると，一行に並んだ四つの式は，i 倍，i^2，i^3 倍の違いにすぎない．したがって，同じ行の四つの式をそれぞれかけ合わせた結果から

$$R^4=(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4$$

であれば，x_1, x_2, x_3, x_4 のすべての置換 (計 24 個) に対して 6 種類の値をしかとらないことが分かる．しかし，我々は 4 次よりも次数の低い 3 次の補助方程式をの構成を目指しており，つまりは，24 個の置換によって 3 種類の値しかとらないようなリゾルベントが必要である．$R^4=(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4$ では，これを求めるために 6 次の補助方程式を解くことになってしまうため，4 次方程式のリゾルベントとしては機能しないのである．

3.2 少しばかりの悪あがき

さきほどの議論で，$R^4=(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4$ では 24 個の置換で 6 種類の値をとってしまうため，4 次方程式のリゾルベントとしては上手くないことが分かったが，

$$R^4=(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4+(x_1-ix_2-x_3+ix_4)^4$$

とすれば，この R は 24 個の置換に対して

$$\begin{array}{l}
(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4+(x_1-ix_2-x_3+ix_4)^4\\
(x_1+ix_2-x_4-ix_3)^4+(x_1-ix_2-x_4+ix_3)^4\\
(x_4+ix_2-x_3-ix_1)^4+(x_4-ix_2-x_3+ix_1)^4
\end{array}$$

という 3 種類の値しかとらない．ここで加えた $(x_1-ix_2-x_3+ix_4)^4$ は「x_1, x_2, x_3, x_4」のそれぞれに「1，$-i$, $(-i)^2$, $(-i)^3$」を付け加えたものである．したがって，この 3 種類の値を R_1, R_2, R_3 とすると，この三つを解に持つような 3 次方程式

$$(t-R_1)(t-R_2)(t-R_3)=0 \iff t^3-(R_1+R_2+R_3)t^2+(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)-R_1R_2R_3=0$$

を考え，x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である $R_1+R_2+R_3)$, $R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1$, $R_1R_2R_3$ を

$$\text{基本対称式}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=a\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=b\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=c\\ x_1x_2x_3x_4=d\end{cases}$$

で表しなおして，3 次方程式をとき，R_1，R_2，R_3 を求めれば良いことになる．しかし，この方法でもこの先に困難がある．最終的に得られた R_1，R_2，R_3 を利用して，

$$\begin{cases}(x_1+ix_2-x_3-ix_4)^4+(x_1-ix_2-x_3+ix_4)^4=R_1\\(x_1+ix_2-x_4-ix_3)^4+(x_1-ix_2-x_4+ix_3)^4=R_2\\(x_4+ix_2-x_3-ix_1)^4+(x_4-ix_2-x_3+ix_1)^4=R_3\end{cases}$$

という連立方程式を解かなければいけないという点である．この方法がさらに前進できるかどうかは，私自身まだ試行錯誤中である．

4 終わりに

ラグランジュは，リゾルベントの本質が

・3 次方程式であれば，$3i=6$ 個の置換に対して，2 種類の値しかとらないような x_1，x_2，x_3 の式
・4 次方程式であれば，$4i=24$ 個の置換に対して，3 種類の値しかとらない x_1，x_2，x_3 の式

であること，さらにはその構成方法が 4 次方程式においては一意的でないことを見抜いていたと私自身は考えている．実際に彼は論文の中で，3 次方程式については

> 我々がしてきた分析によって，これらの方法（カルダノ，チルンハウス，ベズー，オイラーの解法）が基本的には同じであるということは明らかである．なぜなら，それらは一般に，根が $x'+\alpha x''+\alpha x'''$ または $(x'+\alpha x''+\alpha x''')^3$ によって表されるような，あるいは同じことであるが，これに比例した量によって表されるような還元方程式を見つけることにその本質があるからである．

とまとめているのに対し，4 次方程式に関しては，

> 4 次方程式の一般的な解法が依存するような関数が特有に存在する．

つまり，置換によってとり得る値の個数に厳しい制限がつくような「与えられた 4 次方程式の根の関数」が存在する，とまとめている．renewcommand 参考文献参考文献

参考文献

[1] 齋藤詩織『方程式の代数的解法についてのラグランジュの”省察”』（明治大学大学院 2015 年度修士論文）

第IV部

Q and A

今回は，ページ数の都合上，いただいたご質問のみを掲載いたします。
次号の５月号にこれらと回答を合わせて掲載する予定です。
一般会員の方のみが対象ですが，回答ももちろん募集しております。
回答は `secretariat@flexcool.net` まで，お寄せいただけると幸いです。

完璧な作図はできないにもかかわらず中学１年生では実際に定規とコンパスで作図させる単元がありますが，それにどのような意義があるのでしょうか？
私は「実用的な意味は全くなく，自分の書いた図形を批判的にとらえること，その作図で良い論理的な証明を与えることによって生徒の数学的思考力を養うこと」が作図の意義であり，作図方法を暗記させるだけの授業に意味はないと考えました。
ぜひ，皆様のご意見をお聞きしたいです。

線形代数において内積とは、線形空間の元の大きさやなす角を定義するために導入されたものだと認識しています。そのため、高校数学でも上記の動機で内積を導入できないかと考えたのですが、それは可能でしょうか？

「拡張」と「一般化」は何を基準に使い分けていますか？ たとえば、大学のある講義で「余弦定理は三平方の定理の拡張である」と習いましたが、これらの定理の主張は同値であり、「拡張」という言い方には違和感があります。よろしくお願いします。

この問題の解答についてです。

問題.　実数 x, y が $x^2+y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとき，点 $(x+y, xy)$ の動く領域を図示せよ。

解答.

$x+y=X, xy=Y$ とおく。

$x^2+y^2 \leq 1$ であるから $(x+y)^2-2xy \leq 1$ すなわち　$X^2-2Y \leq 1$

したがって

$$Y \geq \frac{X^2}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots(1)$$

また，x, y は 2 次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち

$$t^2-Xt+Y=0$$

の 2 つの実数解であるから，判別式 $D=X^2-4Y$ について $D \geq 0$ より

$$Y \leq \frac{X^2}{4} \quad \cdots(2)$$

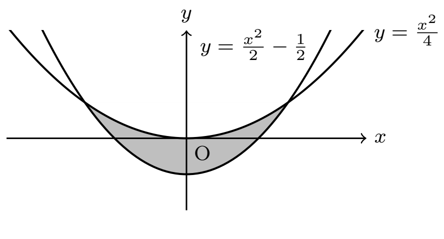
(1), (2) から

$$\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{X^2}{4}$$

変数を x, y に置き換えて

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{x^2}{4}$$

したがって，求める領域は下の図の灰色部分である。ただし，境界線は含む。



解答の最後に X, Y を「変数 x, y に置き換えて」とありますが、この置き換えは必要でしょうか？文字を何と置いても集合としては変わらないと思うので、置き換えは必要ないように思います。何か数学的に文字を置き換えなければならない正当な理由があるのでしょうか？

http://www.tecum.world/

TECUM Logos and Praxis Series
Published by TECUM © on Feb. 14th, 2021