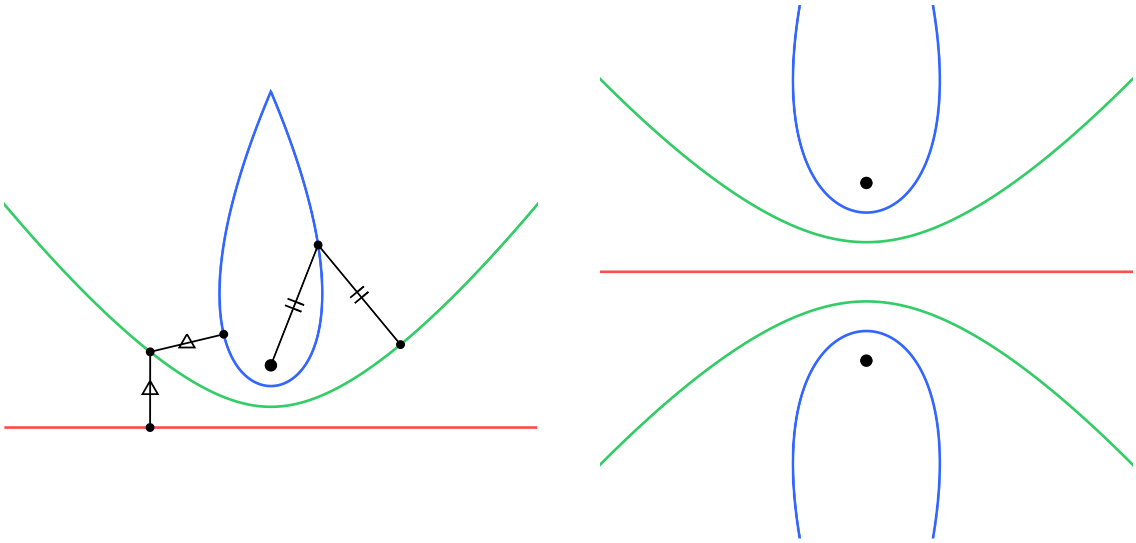
TECUM 数理教育セミナー

セミナー講演資料

研究機関誌『数理教育のロゴスとプラクシス 2021 年 8 月号』



【左】点 p と直線 l の 3 等分線：$C_0(=p)$, C_1, C_2, $C_3(=l)$

【右】2 点 p, q の 6 等分線：$C_0(=p)$, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, $C_6(=q)$

ここで，各 i について，C_i は C_{i-1} と C_{i+1} から等距離にある点の軌跡

Special Thanks to Keiko Imai for her nice picture!

TECUM 機関誌委員会編

2021 年 8 月 9 日

2021年度第2回定期研究会に寄せて

2021年8月9日
特定非営利活動法人 TECUM
理事長　長岡 亮介

はじめは、ここに紹介するにはふさわしくない話題ですが、先月初旬に私が住んでいる東京都では、都議会議員選挙がありました。これまでは、どんなに気にいらない候補でも、とにかく、自分が一票をいれるとしたらこの人以外はない、という消極的な選び方ではありましたが、私は、選挙にはほとんど欠かさず行っておりました。

しかし、今度という今度は、あまりに貧弱な小選挙区候補者の広報を見て落胆しつい選挙を忘れてしまったいうのが本当のところです。

「個性的」な「政策」を掲げる候補者もいましたが、それ自身には大賛成といいたくても、成熟した思索の裏付けをもった政策とは思えない局所的な主張であったり、他の意味不明な主張との混在があったりで、到底支持できるものではありませんでした。

他方、新しい政党も含め既成政党の候補者たちの「政策」は八方美人的な意味で安全な人気取りに過ぎず、小学校の生徒会委員の選挙を見るような印象を受けました。その中にあって、オリンピック中止のような有権者の賛否の分かれる明確な主張が、唯一、日本共産党からしか出ていない東京都都議選全体の政治的貧困状況にもショックを受けました。そして残念なことにその政党も主要政策は所詮、ポピュリズムの域を脱していませんでした。

ポピュリズムといえば、高校、大学の「学費無償化」を唱える政治家たちの主張は、「教科数学を高校必修から外せ」という文科省元高官の最近の発言（これ自身はかなり昔から出ていたことです）と合わせ、《高学歴》の《大衆》化という、形容矛盾のようなわが国の高等教育の悲惨な実態に悪乗りした、無定見で露骨な大衆迎合でありますが、人気取りだけで権威・権力を握ろうとする野卑な野心家の登場は、フランス革命後の混乱した政治状況を彷彿とさせるほどでした。

与党が伸び悩んだことは、「案外、都民もしっかりしている」のかも知れないと思う反面、投票率の記録的な低迷は、無党派層と括られる、「ふつうの人々」が、コロナ禍で社会的距離を強制されるという沈鬱な経験を通じて、一時期いわれていた社会変革の夢を失った政治的無関心 political apathy から、さらに一歩、人間的な活動への意欲を欠いた社会的無関心 social apathy へと進行したのではないかと心配したりもしました。しかし、あまりに貧相な候補者の美辞麗句には、投票率が上がらないこと自身は自然であると言わざるを得ません。

このような政治的な対立軸が不鮮明になっていることの主たる原因は、突然襲って来た世界的、歴史的な大危機の中にあって、オリンピック開催というつまらない「夢」を捨てられず、大胆な方針を提起することのリスクを恐れて口では「模範生」的な、実は腰の定まっていない政治的な「決断」を繰り返しながら国家的

な財政の悪化で打つ手をますます減らしている無能で無責任な政府、与野党にありますが、そのような政治家を顔色を伺うばかりで独立した政策的な情報発信能力を減少させた行政やジャーナリズムも責任から自由ではありえないでしょう。

思い出すのは、戦後、いわゆる敗戦の混乱期を抜けて官民あげての復興活動が盛んになると、産業界では、「理工系」の人材不足が表面化して、その採用枠が急拡大し、結果として給与が低い教師の為り手が理工系で急速に減り、「デモシカ教師」が大量に採用される時代がありました。そして、彼らが、というよりは、彼らを叱咤激励することなく、むしろ反対に「教師＝労働者論」で実際上、若手教師の知識人としての無能さを庇（かば）い、賃金の向上のような受けの良い言葉で「戦う仲間」を増やすことを一義的に考えた当時の教員組合の指導者たちの、歴史と思想の貧困によって、今日の教育の困難が現出したように思います。大袈裟に言えば、そのときから、教師が自ら「聖職」を投げ出し、「労働者」になってしまったからです。

この間の教職員組合の「政治主義」が、右翼政治家に牛耳られた文部行政を、戦う相手としてあまりにふがいない「敵」としてまつりあげ、それとの間に不毛な「戦い」が長く続き、それが文字通り不毛な終戦（組合の実質的な消滅と各都道府県教育委員会の独立性の喪失）を迎えたのはごく最近の話です。

そんなことを思うと、かつての「デモシカ教師」の登場の歴史に、今日でも、今は重い痛みが胃を刺すような気がします。

そんな教師に習って育った人間が責任感をもった政治家、官僚になるはずもないでしょう。

まさに、「デモシカ都議会議員」の排出で、今度は地方行政が、税収の悪化、社会補償費の増大に加え、戦いの戦線を切り開く英知、すなわち、思慮深い知性と勇気ある決断の喪失で、一層の低迷期を迎えるのでしょう。

しかし、どこまで落ちても、都議会は、どうせ大したことはできないでしょうから、デモシカ議員はおいておいてデモシカ教師が残した悪弊をきっぱりと清算することは必須だと思います。

TECUM にとって，やるべきことがますます重大になるようで、大いなる哀しみのを大いなる励みに繋げて行きましょう。私達には権力も権威もなくても、普遍性を希求してやまない数学的精神と数学に出会ったときに見せる子ども達の明るい笑顔という力強い味方がついているのですから。そして、若者が未来を変革する意思と力をもった一人前の大人へと成長するのを手助けするのに、数学ほど適した科目はなかなかありませんし。

目 次

第Ⅰ部

《大学入学共通テスト》を見て

大学入学共通テストに関して

松並 奏史

2021年1月に「大学入学共通テスト」の初回が実施されました。そこで今号では，TECUM 一般会員の数名の方々に，その分析をお願いいたしました。実施されてから半年以上の時が経ち，既に様々な媒体で数多くの分析がなされていますが，ほかにはない視点・切り口から原稿が集まっております。

ここではまず簡単に，共通テストに関する基本的な情報に触れておきたいと思います。不十分な点も多々あると思いますので，研究会では，適宜みなさまから補足等お願いできれば幸いです。

1　大学入学共通テスト導入の経緯

共通テストは，文部科学省のいう「高大接続改革」，つまり高校教育，大学教育，そしてそれらをつなぐ大学入学者選抜の3つの一体的な改革において，「大学入学者選抜の改革」の目玉として位置づけられたものでした。この共通テストでは《学力の3要素》[1]，特に「知識・技能」だけではなく「思考力・判断力・表現力」をも判定することが目指され，主要3教科といわれる英語・数学・国語において，民間試験の活用と記述式問題の導入が計画されましたが，その設計の随所に不備が指摘され，現行課程での見送りが決まり，新課程でも正式に導入が断念される見通しとなりました。

ただ，この「知識・技能」に留まらない「学力」を判定するという方向性は変わらず，それが結果として共通テストの問題の，センター試験の問題と比較したときの質的な変化につながっています。

2　大学入学共通テストの作問の方向性

次に，以上の点を踏まえて，共通テストはどのような考え方で問題が作成されているのか，『令和4年度大学入学者選抜に係る大学入学共通テスト問題作成方針』[1] に挙げられている3つの「基本的な考え方」の表題を引用します。

[1]2007年の学校教育法改正により，小学校教育の目標として明示された，「知識・技能」，「思考力・判断力・表現力」，「主体的に学習に取り組む態度」のことを指します。

○ 大学入試センター試験における問題評価・改善の蓄積を生かしつつ，共通テストで問いたい力を明確にした問題作成

○ 高等学校教育の成果として身に付けた，大学教育の基礎力となる知識・技能や思考力，判断力，表現力等を問う問題作成

○ 「どのように学ぶか」を踏まえた問題の場面設定

また，同資料 [1] の別添として，数学については次のような問題作成方針が示されています。

> 数学的な問題解決の過程を重視する。事象の数量等に着目して数学的な問題を見いだすこと，構想・見通しを立てること，目的に応じて数・式，図，表，グラフなどを活用し，一定の手順に従って数学的に処理すること，及び解決過程を振り返り，得られた結果を意味付けたり，活用したりすることなどを求める。また，問題の作成に当たっては，日常の事象や，数学のよさを実感できる題材，教科書等では扱われていない数学の定理等を既知の知識等を活用しながら導くことのできるような題材等を含めて検討する。

最後に，具体的に問題構成について触れた資料を紹介します。2021 年 1 月の共通テストの実施に先立ち，2 度の試行調査が行われました。2 度目の試行調査において，とりわけ数学（と理科）は平均正答率が低かったため，その問題構成が見直されました ([2], pp.27-28)。特に「全体の分量と試験時間のバランスに課題が残った」とのことから，問題解決の全過程を問うような問題を試行調査から減らし，さらに日常的な題材も減らして「数学 I・数学 A の共通問題においては最低 1 題」,「数学 II・数学 B についても 1 題出題するように努める」ことが明示されました。

参考文献

[1] 独立行政法人 大学入試センター, 令和 4 年度大学入学者選抜に係る大学入学共通テスト問題作成方針, `https://www.dnc.ac.jp/kyotsu/shiken_jouhou/r4.html`, 2021

[2] 独立行政法人 大学入試センター, 大学入学共通テストの導入に向けた平成 30 年度（2018 年度）試行調査（プレテスト）の結果報告, `https://www.dnc.ac.jp/news/20190404-03.html`, 2019

「共通テスト」を見て
―「なぜ膨大な努力が数学教育に有益とならないのか」という逆説に対するアプローチ

長岡　亮介

【要約】『ロゴスとプラクシス 2021 年 8 月号』の特集記事に対して、多くの善意の教員からは、「へそ曲がり」と非難されるかも知れない、正直な感想と今後の数学教育への展望を、最小限でも良いから共有されることを願って短くまとめる。

0.1　はじめに

機関誌委員会委員長からの依頼で、気楽に原稿を引き受けたものの、その膨大な資料（実施された試験問題）を散見するだけで退屈さにため息が出てしまい、筆（正確には、keyboard 入力）が進まず、〆切ぎりぎりになって原稿を提出することになった。

先ずその理由からはじめよう。

表題に掲げた通り、この出題担当者たちが、かつての「大学入試センター試験」の負の伝統を厳しく総括し、その致命的な欠陥を修正しようと後に述べるように懸命な努力を捧げたことは、少しでも問題作成に携わった人間には明らかである。この努力に敬意を表することに筆者はいかなる躊躇もない。

しかし、有名なデーデキント (R. Dedekind) の歴史的なリーフレットの表題を真似て、そもそも『大学入試の共通テストとは何か、何であるべきか』と問うならば、先ずは歴史を振り返ってみても、「共通一次試験」以来、「大学入試センター試験」を経て、国民的な規模で形成された「世論」を前提にすれば、大学入試センターという文科省の数少ない出先機関を死守するために、負の遺産 negative legacy を脈々と継承して来た責任を隠蔽するために、《見かけ上の刷新》を前面に出しながらも、現場と教育ジャーナリズムの反発を最小化するために、戦後日本の数学教育の抱える負の伝統 negarive tradition からの《逸脱を慎重に回避》するという厳しい制約の存在は試行テストの段階から明らかであった。

歴史を振り返れば、一期校、二期校と分かれていた国立大学の格差と劣等感を是正し、合わせて、小規模大学の大学入試の出題と採点の負担を減らし、入試問題の質を向上すると同時に、各国立大学の実情にあった独自の試験でそれぞれの地域で良質の学生を確保する、という夢と希望 ― 言い換えれば、幻想というべき一方的な願望 ― に満ちて出発した「共通一次試験」は、数学に関していえば、理工系の先端的大学から高校数学とはほとんど縁のない専門を集めた大学まで国立大学としていっしょくたにするという政策的無思慮から、施行されてすぐにその

制度的な無理が露呈したが、「経済成長」に伴う大学進学率の向上を受けて、多数の新設大学の認可、既設大学の学生定員の臨時増という行政的政治判断の結果必然的に生まれた、「入試負担に耐えられない大学」の増加という実際の社会情勢を受けて、やがて、「共通一次試験」は、「大学入試センター」という国立機関による、国公立大学には強制的な、可能的には全私立大学を含む日本全国のすべての大学の共通の試験制度として肥大化し、その弊害は、**優秀な学生の国立大学忌避傾向**のみならず、先取り学習に象徴される**高校教育の質の劣化**までも引き起こす水準にまで達していた。

それは、文科省に近い人々ですら無視できないレベルであった。科挙試験のような試験の難しさが問題であったのではない。試験対策のために「18 の春」が泣かされた分けでもない。「出題者の意図」を素早く察して「一刻も早く正解を選び正しくマークする」という二等兵に要求される「上官の顔色を察する従順な小ずるさ」と、「反復横飛び」のような「決して退屈しない正確さと素早さ」がだけが求められる、という試験制度が、わが国でも有名なフランスのバカロレア（この制度の実情についてはかなり誤解されている！）をはじめ、多くの先進諸国における《高校卒業学力認定試験》＝《大学入学資格基礎学力判定認定試験》としてならばともかく、大学入学試験の《合否の決定要因》として**若者の知性に対する無意味で残酷な拷問**となっている現実を行政すら無視できなくなっていた、ということである。

大学入試センター試験という制度を守るために、英語で listening を採り入れる等のこざかしい手直しのために膨大な予算と時間と労力が空費されて来たが、そもそも、空欄補充（正確には選択式の穴埋め）形式の「基礎学力」と呼ばれる基本知識の有無を「正確かつ公平」に評価したところで、それが**《高等教育入学判定として使われることの合理性という本質的な問題》**に目が向けられて来なかったのは、ひたすら旧制度を守ることに腐心する文科省、それに追随する官許御用教育学者、そして相も変わらぬ数学教育の現状に満足する教育現場の指導的な人々の共犯構造によるところが大きいと筆者は思う。

この機関誌企画の小論で、上にあげた本質的な問題に触れる余裕はとてもないが、表面的な問題に限定して注目しておくべき重要な論点をあげておこう。

0.2　前年度の共通テストの《画期的な新しさ》

共通テストは、文科省が、営々と築いて来た欧米の一部に見られるような試験の民間委託が、実施の直前になって、表面上は学校現場の不安と反発、それを政治利用する野党政治家の攻撃、ボロボロの政権与党のなりふり構わぬ蜥蜴（トカゲ）の尻尾切り、そして実質的には文科省の稚拙な政策立案に対する他の有力省庁の愚弄に近い批判を受けて一遍に崩壊した結果、採点の公平性と効率的な判定、という謳い文句を維持して、空欄補充形式を採用せざるを得なくなったものの、筆者は次の点で画期的であると思う。箇条書き的に列挙してみよう。

- 従来からの試験 examination という表現を断念して、日本でいえば、簡便な「小テスト」を意味する英単語である test を採用したことは、先ず画期的である。空欄補充形式では test にすぎず、若者の潜在的な知的能力を慎重に吟味 examine する試験 examination といえる代物でないことは、本来は自明であるが、この国際的な非常識を言い張って来たことの反省を行政が国際的に表明したことの意義は大きい。

- 空欄補充形式ながら、「穴埋め」の「穴」に入るものが、従来の 0 から 9 までの 10 個の数という馬鹿げた伝統を打ち破り、出題者と受験生が、その形式に数学的な思考まで縛られる制約を大きく弾力化したこと、特に数式を選択肢に入れたことも、当然のことながら重要である。特に、「正解を選ぶ」というこれまで日本の教育が囚われて来た因習を打ち破り、正解と誤解の組合せを選択させる形式は、筆者自身もかつて試みたものである（もしかすると大学入試センター試験でも数学以外ではあったかも知れない）が、少数の問題で、解答の選択肢を増やし、「まぐれ当たり」を減らすと同時に、教育的に意味の乏しい選択肢を用意する無駄な手間を減らす工夫として、空欄補充形式のなかでの限界に挑戦した意味は小さくない。こんな小手先の工夫にすら今まで挑戦されることがなかった日本の数学教育の体質を猛省し、他山の石としたい。

- 他教科に当てはまるかどうか分からないが、数学の問題に対する解答において、もっとも重要な問題の意味を受験生に分かるように明示的に提示した上で、考えさせるという形式は、これまでにもすでに大学入試では幾つかの実践例があるが、「大学入試センター試験」制度では、統計分野を除いてはなかったもので、このスタイルが大きく採用されたことの重要性は、上の二つの表面的な改良以上に重要である。「数学で重要なのは、基本公式や基本問題の解法の表面的知識ではなくそれを支える数学的理解である」という大学以上では常識以下の常識が、学校現場ですら理解されて来なかった（これまで多くの高校で「大学入試センター対策」とやらが本気で実際に行われて来た！） ことを考えれば、これは明らかである。数学で大切なのはクイズの正解を素早く答える知識や技でなく、数学的なストーリを理解し、それを数学的に分析・総合する能力であるという常識がこれを機に普及することを祈る。もちろん、数学的には、短い問題文からその数学的なストーリを見抜く数学的眼力が重要であることはいうまでもないが、従来の形式では、かえってストーリーが見抜きづらいという重大な欠点があったことは大問題であったし、そもそも、そのような眼力を大学入学志望者全員に要求することには、数学の覇権主義と解釈される危険に、私達は警戒心をもって良いと思う。

以上に比較すると、些細な話題であるが、幾つか、日常的な現象に数学的なモデルを通じて接近するという国際的にはすでに数学教育の常識となっている潮流

が採り入れられていることも日本にいると珍しい「新傾向」かも知れない。反対に、切角の統計が、総務省のデータに基づいて、それを欧米なら小学生並に低レベル化して引用しているのは共通テストの時間的な制約、学習指導要からとはいえ少し情けない。おそらく出題者はもう少し本格的な出題と統計的な問題提起を狙っていたに違いないと同情してしまう。統計分野で簡単で良い問題がセンター試験時代に消費し尽くしてしまったということであろうか。

0.3　重大な問題であるとはいわないが、‥

以下は、今回の「共通テスト」の責任者の個性によるものに過ぎないのかも知れないので、上で指摘したことに比べると、取り立てて大きく取り上げるべき問題ではないが、二つだけ気になったことを指摘しておきたい。改善が不可能であろう点と容易に改善できる点である。

0.3.1　新鮮な素材でないと、料理の工夫ではどうしようもない

一つは
$sin\theta, \cos\theta$ の線型結合 $a\sin\theta+b\cos\theta$ を「三角関数の合成」（その昔は「単振動の合成」と意味の分かる表現が一般的であった！いつの間にかこのおかしな表現が高校数学では一般化してしまった。）という変形を用いて最大値等を求めるという、数学的には必ずしも筋の良くない問題が、多くの学習者が正しく理解していない、あるいは誤った指導で学習者の間に誤解が定着しているという理由からか？これまで「共通一次試験」でも「大学入試センター試験」でも何回も繰り返し出題されて来たが、こんなものが高校数学の到達目標であるとすればあまりに情けないのではないだろうか。出題形式だけではなく、出題内容そのものにも刷新の意気込みを期待することが《ないものねだり》であることは百も承知で書いている。

0.3.2　卑しくも相手は高等教育を志す若者であることを忘れていないか

例えば、数学II・数学 B の (2) に「花子さんと太郎さんの会話」があるが、小学校低学年生の教材提示、あるいは、中学お受験の入試問題ならありそうな記述スタイルであるが、大学入試の共通テストしてこのままの形で、きっと大真面目に出題されたことに、私自身は、これが出題者の「数学以外の躓きの種を減少してやろう」という優しさ溢れるいたわりという素朴な主観的思い込みによるものなのか、それとも「昨今の若者の幼稚化傾向」を配慮しての若者に嫌われないための意図した「微笑戦術」によるものなのか、想像もできないが、はっきりいって私自身は生理的な嫌悪感を禁じ得なかった。「先生」と同様「出題者」にも毅然とした品格を感じてこそ受験生もそれに対応して自分の能力を立派に発揮したいと

思うのではないだろうか。フルカラー化を契機に一層進行した検定教科書の見掛けの幼稚化傾向がとうとう入試にまで及んだと思うと哀しい。

0.4　共通テストの今後は

指摘されることがあまりないが、日本の大学共通の弱点は、各大学が「ふさわしい学力」の若者を各大学で実施する有料（決して安くない！）の入学試験で判定して入学させているということである。この制度が普及している歴史的な背景は、文科省の認可した高校を卒業しただけでは大学で必要な学力が保証されていない、という高校間格差、大学間格差に対する日本人の伝統的な学校感にあった。

それが、高校進学率の向上を受け、このような東アジア的な文化から欧米的な「先進国文化」への移行を狙う文教行政の指導を受けて、日本の大学では形ばかりの AO 入試、実に多様な推薦入試をはじめ、入試制度の「弾力化」を計られて来た。「大卒」を採用する企業にも、学歴による選別を禁止する方向で様々な採用試験の「改革」がなされて来た。その結果、大学入試が、かつての上級公務員試験のように、各人の知的な資質を計る実質的な指標として使うにはふさわしいものとはいえない状況が現実化している。

にも関わらず、国民の間に定着した「学歴志向」は空洞化したとはいえ共同幻想として根強く残っている。そして、そのような共同幻想に依拠して展開する「大学ビジネス」への野心も完全には衰退していない。医師、看護師、教師をはじめ「大卒」資格が前提となる「国家資格」がたくさんあるせいである。

こうした中で、「大卒」資格の一定の基準以上にを維持するためには、そして、そのために、ホンネでは期待できない各大学の教育力を競争的に向上させるためには、国際的な水準で学問の発展に関わる一部大学を除いた大学の入学者の能力の実質的な水平化を計り、大学間競争の平和的な持続を考えるのは、文教行政の明るい未来（＝影響力の維持）を夢見る人の自然な発想であろう。

その意味では、名前をどう変えようと、大学入試センターは、文教行政の高校教育に対する《政治的、政策的な目玉ともいえる装置》である。官僚が、聡明とはとてもいえない政治家に頭が上がらない状況では、文教行政にとって、ノーベル賞の個数は関心事であっても、いつ何に役立つか分からない広大で深遠な学問世界を支える広範な知的な基盤など、古臭い無用の長物に映っているとしてもやむを得ないことだろう。これは、単に文部官僚の資質の問題ではなく、そのような官僚しか文教行政からいなくなるような政治家を選択している国民の資質の問題であると筆者は深刻に考えている。

以上の意味で名前を変えようと、少々の出題形式の変更があろうと、多少の選択形式が導入されようと、全国一律の同一問題という根本的な制度を変更しない限り、大きな改革とはなり得ないと大学入試センターという制度の改革の未来に筆者は悲観的である。

0.5　されど、今を生きる若者のために

そうはいっても、若者にとっては選択肢はない。いかに悲惨な制度といえども、その中で生きて行く若者、そのような若者に付き添おうと努力する教師にとって、上のような批判は自分達には関係ない無責任に映る可能性は大きい。決してそうでないことを簡略ながら最後に述べよう。

先ず第一には、共通テストが、高校時代の勉強の最終目標と考えないようにしようということである。共通テストで計ることができるのは、所詮は、発せられた問題に対する標準的で平凡な解答能力に過ぎず、自ら問題を発見し、その解答を時間をかけて探す、という本当の意味で将来を決する知的な能力ではまったくない。しかるに、大学を卒業後、職業人・社会人として、また家庭人として試されるのは、周囲の fake news に流されない真の知的能力であることを忘れてはならないと思う。そのような能力を磨きはじめるのは、中学校の期間、それを本格的に磨くのは、高校生の期間であることをしっかりと心にとめたい。

第二に、少子化が進行し、大学入学は、大学定員の大幅削減を断行しない限り、かつての難関校を含め、平易化することは統計的に自明である。将来の就職、収入の点から？今は人気の高い医療系大学も、この人気を維持できないことは、医師の大量生産時代の到来と国家財政の悪化＝国民皆保健制度の崩壊というだれにも予想可能な未来図を考慮すればやはり自明であろう。大中小病院の共倒れを恐れて病床数の調整をして来たことを今回のコロナ禍は明らかにしたし、都心では歯科医に関して、この未来図がすでに現実化し、その結果ビジネスで淘汰された良い歯科医（立派な歯科医は商売が不得意なものである！）を失いつつある都民は本当に困っている。

それ以上に、今まで人気を誇って来た日本の「一流大学」にとってもっとも深刻なのは、世界のより一流の大学が教育鎖国の撤廃を待って日本に押し寄せてくる日が遠くないことである。「英語が話せない」という庶民の内なる鎖国が解けた途端にそれはやって来る。選別を迫られるのは、受験生ではなく、大学になることを心に深くとめておこう。《大学が入学を懇願する受験生になる》ことがこれからの高校生の目標である。

第三に、大学入試が人生の節目であった時代、言い換えれば、大学合格＝科挙試験合格であった時代は遠の過去の物語であることを心にとめたい。「一流大学」の入試合格は、合格者の将来を保証してくれるものではない。他方、不合格者の将来に烙印を押すものでもない。《長い人生を充実して知的にたくましく生きるための力》こそが大切であること、それは主として高校時代に培われる力で、高校時代を従属的に貧困に生きてしまった人間の負う人生のハンディキャップは「一流大学」を卒業した程度では到底挽回不可能であるという人間の一生を支配する恐ろしい鉄則を忘れないようにして欲しい。

そして、最後に、共通テストの問題の程度は、数学に関する限り、最小限の基礎がしっかりしていれば、そして、試験時間に退屈さえしなれば、簡単に解くこ

とができる、ごく簡単なレベルであり、形式上の微細な変化も、これまでそれでビジネスを立てて来た人々が手の平を返して「共通テスト対策」を騒ぎたてるような、取り立てて大騒ぎするほどの大問題では、決してないことである。根本的に変更する必要があるのは、これまでに派手にその意義を喧伝して来た、本当は無意味な「共通一次対策」「センター試験対策」ビジネスの方だけであると筆者は確信している。

大学入試センター試験・共通テストにおける数学Ⅰ・A「データの分析」の変遷について

大和大学　及川久遠

１．はじめに

いつかセンター試験と共通テストにおける「データの分析」の出題を分析したいと思っていたところ今回のお話をいただきました．ただ，あまり時間がなかったこともあり，この拙文では本試験に限定して最初の年である 2015 年から最新の 2021 年までの 7 年分を順に追いかけてみようと思う．たったそれだけでも出題者の苦労が垣間見えるからである．

２．2013 年発表の試作問題と統計検定の問題

初期の問題をよく見ると統計検定 3 級（現行カリキュラムの高校 1 年レベル）の問題を参考にしているようにも思える．そこで，ここでは，試作問題とそれよりも前の 2011 年と 2012 年に実施された統計検定の問題を見比べてみよう．

ご存知の通り，2015 年の実施に先駆けて 2013 年に「データの分析」の試作問題が示された．小問は 3 問でおよそ次の通りである．（実物は web 上で探してください．）

(1) 平均値と五数要約と呼ばれる「最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値」を与え，箱ひげ図を選ばせる問題.
(2) 観測値を 0.5 倍して 50 足すという変数変換したときの平均値と分散を算出する問題と相関係数を求める問題.
(3) 相関係数に関する正誤問題.

(1)については，教科書レベルの問いであるのでコメントは不要であろう．そこで，統計検定の問題と比べてみよう．次の問題は 2012 年 11 月実施の統計検定 3 級の問題である．

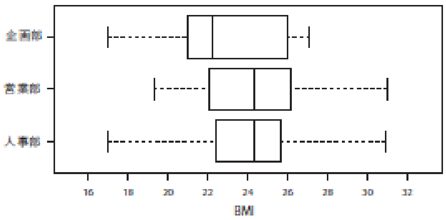
企画部の 17 人，営業部の 29 人，人事部の 11 人の男性社員の BMI を計算して，小数第 2 位を四捨五入した値を使い，部署ごとに 5 数要約を求めたところ，次のようになった。

5 数要約	企画部	営業部	人事部
最小値	19.3	17.0	17.0
第 1 四分位数	22.1	21.0	22.4
中央値	24.3	22.2	24.3
第 3 四分位数	26.4	26.0	25.7
最大値	31.0	27.1	30.9

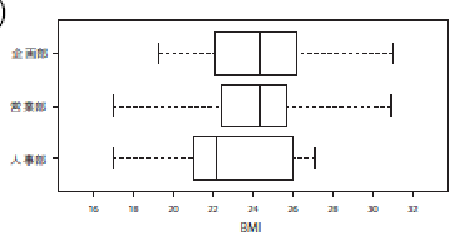
〔1〕3 つの部署の箱ひげ図として正しいものを，次の ① ～ ④ のうちから一つ選べ。

$\boxed{\textbf{16}}$

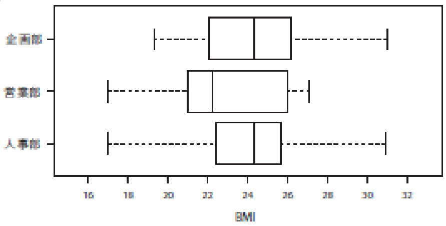
①



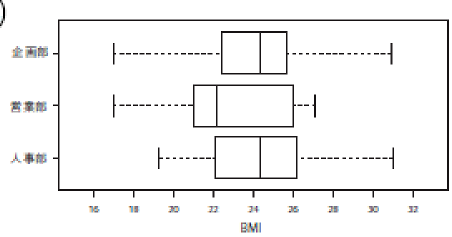
②



③



④



2012 年 統計検定 問 14 より

次の(2)では 2 つ述べたい．まず 1 つは変数変換である．（マイナーチェンジ前の）多くの教科書では扱っていないテーマであるが，統計検定では毎年のように出題されている．

問 12 ある学級で行ったテストの結果をまとめたところ，平均は 45 点で標準偏差は 12 点であった。ただし，テストの得点はすべて整数値とする。全体的に平均点が低かったため，それぞれの点数に対して次のような調整を行うことを考えた。

a 全員の得点に一律 5 点を加える。

b 全員の得点を 10 % 増加させる。ただし，このとき 53 点の場合には 5.3 点を加えることとし，58.3 点のように小数の得点も認めることとする。

このとき，次の ① ～ ⑤ の記述のうち**誤っているもの**を，一つ選べ。 $\boxed{\textbf{14}}$

① **a** の場合，標準偏差は 12 点のままである。

② **a** の場合よりも **b** の場合の方が平均点は低くなる。

③ **a** の場合よりも **b** の場合の方が標準偏差は大きくなる。

④ **a** の場合の平均点は 50 点である。

⑤ **a** の場合と **b** の場合において，60 点以上の生徒の割合がどちらが大きくなるのかは，この情報からでは分からない。

2011 年 統計検定 3 級より

実はもう 1 つといったのは「共分散」という用語である．共分散は一部の教科書に記述はあるものの，学習指導要領で〔用語〕として扱っていないため，2016 年を除いて出題されるたび，問題文中に共分散の説明（定義）が示めされている．

(3)は相関係数に関する正誤問題であるが，3 つの記述が教育的なものであるのだが，特に下に示した記述[C]に関しては，この試作以来出題されていないのは残念に思う．

(3) 相関係数の一般的な性質に関する次の [A] から [C] の説明について，$\boxed{\text{ス}}$ ということがいえる。$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

[A] 相関係数 r は，常に $-1 \leq r \leq 1$ であり，すべてのデータが 1 つの曲線上に存在するときには，いつでも $r = 1$ または $r = -1$ である。

[B] もとのデータを定数倍しても，相関係数の値は変わらないが，もとのデータに定数を加えると相関係数の値は変わる。

[C] 2 つの変量間の相関係数の値が高い場合には，これらの 2 つの変量には因果関係があるといえる。

⓪ [A] だけが正しい　　① [B] だけが正しい

② [C] だけが正しい　　③ [A] だけが間違っている

④ ⓪～③のどれでもない

2013 年 大学入試センター試験試作問題より

このような出題形式は統計検定ではよく見られるものであるが，2013 年以前のセンター試験においてこのような出題はなかった．問題形式の確認をこめて統計検定より 1 問紹介しておこう．

問 3　次の I，II，III は，データを統計グラフに表現する方法に関する記述である。

I.　毎日の平均気温は質的データであるため，折れ線グラフを用いて表す。

II.　A 市の各月におけるごみの総量データは時系列の量的データであるため，折れ線グラフを用いて各月の比較を行う。

III.　2000 年以降の毎年の B 市における第 1 次，第 2 次，第 3 次産業の就業者の構成比率は時系列データであるため，折れ線グラフを用いて各年の比較を行う。

このⅠ，Ⅱ，Ⅲの記述について，最も適切な組合せを，次の①～⑤のうちから一つ選べ。 $\boxed{\ 3\ }$

① Ⅰの記述のみ正しい。
② Ⅱの記述のみ正しい。
③ Ⅲの記述のみ正しい。
④ Ⅰ, Ⅱの記述のみ正しい。
⑤ Ⅱ, Ⅲの記述のみ正しい。

2012 年 統計検定 3 級より

相関係数の性質に関する問題も試作問題が発表される前に統計検定でも出題されているので参考までに紹介しておく．

問 4　2 つの変量 x と y の相関係数を r とする。このときの記述として**誤っているもの**を，次の①～⑤のうちから一つ選べ。 $\boxed{\ 5\ }$

① x をすべて 2 倍してできる変量 z と変量 y の相関係数は r と等しい。
② x にすべて 10 を加えてできる変量 z と変量 y の相関係数は r と等しい。
③ r は -1 以上 1 以下の値を必ず取る。
④ 変量 y と変量 x の相関係数は $-r$ となる。
⑤ 2 つの変量 x と y が右下がりの直線の近くに分布しているとき，相関係数 r は -1 に近い値となる。

2011 年 統計検定 3 級より

３．2015 年本試験の問題と 2013 年発表の試作問題

前章では試作問題と統計検定の問題を比較してみた．確証はないが，参考にしていないとは思えない．では，この試作問題を踏まえて最初に出題された 2015 年本試験の問題はどのようなものだったであろうか．簡単ではあるが考察してみよう．

まず，特筆すべきはヒストグラムと散布図の登場である．統計学の 3 大グラフとも呼ばれる，ヒストグラム，箱ひげ図，散布図のすべてが出ていて，以降，2 回の共通テスト試行調査と 2021 年第 2 日程以外，本試験では毎回 3 つのグラフはすべて出ている．2015 年の数学Ⅰ・A の問題は，中問 2 問で構成され，中問〔1〕でヒストグラムの読み取りと箱ひげ図の読み取り，中問〔2〕で相関係数の算出が出題された．中問〔2〕で散布図は与えられたが，それを読むような問題ではなかった．使われたデータは生データではなく，問題用に用意されたものである（と思われる）．中問〔1〕が試作問題(1)に相当し，中問〔2〕が

試作問題(2)の後半部分に相当する．残念ながら統計の問題らしい試作問題(3)のような問題は出題されなかった．また，試作問題(2)の前半部分にあった変数変換の問題も出題されなかったことから，出題内容・難易度から一部の先生方に「データの分析はセンター直前に教えれば十分」という誤ったメッセージを送ってしまったのではないかと心配した．

４．2016 年から 2021 年の本試験の問題

2016 年より生データを使用した問題に変わった．その後は 2 回の試行調査以外はすべて生データを使用した問題である．出典と問題構成を一覧にしておこう．

出題年	出典	問題構成
2016	家計調査年報（総務省） 過去の気象データ（気象庁）	中問 2 問（〔1〕は図形と計量） 〔2〕散布図の読み取り 〔3〕ヒストグラムの読み取り 散布図の読み取り 変数変換（計算問題はこれのみ）
2017	国際スキー連盟（英語）	中問 2 問（〔1〕は図形と計量） 〔2〕散布図の読み取り 変数変換 ヒストグラムの読み取り 箱ひげ図の読み取り ※計算問題なし
2018	ガーディアン社（英語）	中問 2 問（〔1〕は図形と計量） 〔2〕ヒストグラム・箱ひげ図の読み取り 変数変換と散布図・箱ひげ図の読み取り 共分散を求める公式の導出 ※計算問題なし
2019	生物季節観測データ（気象庁）	中問 2 問（〔1〕は図形と計量） 〔2〕箱ひげ図の読み取り 散布図・箱ひげ図の読み取り 標準化（変数変換）と散布図の読み取り ※計算問題なし（？）
2020	市区町村別平均寿命 都道府県別平均寿命 （ともに厚生労働省）	中問 2 問（〔1〕は図形と計量） 〔2〕四分位数に関する問題 箱ひげ図の読み取り ヒストグラムの読み取り 散布図の読み取り

		※計算問題なし
2021 第1	労働力調査（総務省）	中問2問（〔1〕は2次関数） 〔2〕箱ひげ図の読み取り（2問） 散布図の読み取り（2問） ※計算問題なし
2021 第2	旅券統計（外務省） 学校基本調査（文部科学省）	中問2問（〔1〕は2次関数） 〔2〕散布図の読み取り 度数分布表から平均値（の近似値）を求める方法とその計算 度数分布表から分散（の近似値）を求める方法とその計算

2013年の試行問題と2015年の本試験の関係から，共通テストも試行調査のような問題が出題されるのではないかと思われたが，蓋を開けてみたらセンター試験の出題形式を踏襲していたといえる．来年度（2022 年度）から始まる新課程での共通テストが行われる2025年1月までの残り4回も同じ出題形式であろう．

計算問題がないことに関して,現場の先生の中には戸惑いを感じる方もいると思われる．また，統計学者の中にはセンター試験・共通テストの統計の問題は統計ではないとおっしゃる方もいる．しかし，センター試験・共通テストは「数学Ⅰおよび数学Ⅰ・A」の試験問題であること，センター試験60分，共通テスト70分という限られた時間の中でそれなりの大きさのデータの平均値や分散,相関係数を単に求めるだけの問題が適切な問題なのか,また，計算のみで分析がない問題が「データの分析」として適切な問題なのかを考慮すると，2016年から続く（2021年第2日程はいろいろな意味で例外）この形式が統計らしさを保ちつつ，数学の問題として出題するモデルの1つであるように思われる．

５．おわりに

センター試験・共通テストの鋭く詳細な分析は長岡先生や第一線でご活躍されていらっしゃる先生方に託し，統計を専門とする教育学部の人間の一人として，統計分野の出題のみにスポットをあてた．今回はページ数の関係で追試験まで言及をしなかったが，この発表を機に今後は追試験についても言及していきたい．特に追試験はデータの分析に限らず挑戦的（実験的？）問題が多々見られ，興味深いので改めて発表する価値は十分あると確信している．

末筆になりますが，今回，このような機会を与えてくださった長岡亮介先生，松並奏史さんに深謝いたします.

第一回大学入学共通テストについて

岐阜県立大垣北高等学校
松野智博

この 1 月に初めて行われた大学入学共通テストについて、個人的な感想と私の授業についての反省と今後の課題をまとめた。

本試験については計算量が減り、解答群から選択する方式など工夫されていて、数学 I A の試験時間が 70 分に増加したこともあり、じっくりと思考させたいという作成者の意図が伝わってくる。しかし、第 2 日程においては計算量も多く、平均点がかなり低かったことは試験の平等性からも残念である。

表　令和 3 年度共通テスト平均点（抜粋）

	数学Ⅰ・A	数学Ⅱ・B	国語	英語（リーディング）
第 1 日程(1/17)	57.68	59.93	117.51	58.50
第 2 日程(1/31)	39.62	37.40	119.49	56.68

（令和 3 年 2 月 18 日　大学入試共通センター）

知っているか、初めて見るか

数学 I A 第 1 問(3)2 次方程式の解が有理数になる場合、判別式が平方数になる
数学ⅡB 第 1 問〔1〕cos での合成〔2〕双曲線関数
第 2 問(1)放物線と接線と y 軸に平行な直線とで囲まれた部分の面積
第 5 問(1)黄金比と正五角形の関係、立方体の正 12 面体への埋め込み

このようなものの中には、今後の大学数学に関係するものや、教科書外ではあるが数学的に意味のあるものもある。大学入試センターの問題作成方針に沿った出題である。

実際の問題では、ヒントが会話文で出されながら、その誘導に乗って考えを深めていく形式が多い。ヒントを理解し、出題者の意図や話の流れをつかむ能力が必要である。しかし、題材を知っていれば、すぐに解答にたどり着くことができる。

授業では教科書の内容に加えて、発展的な内容も紹介している。発展的内容の量や質は教員間で統一する場合もあれば、統一せずに個人的な経験、知識を伝えることも多い。発展的内容を単に知識として教え込むのではなく、その内容を生徒が自ら発見するような授業を展開したり、生徒同士で共有したりしながら理解を深めていく必要がある。これは基礎・基本にあたる内容を学習するときも同様である。そのためには、いま学習している数学がその先の数学にどのようにつながるかを示したり、日常の生活の中で数学を活用する姿勢を見

せたりすることが大切である。一方的に教え込んだ内容は、生徒には考え方も知識も何も残らない。理解もせず、暗記してしまうような残念なことにならないようにさせたい。また、限られた授業時間の中でどこまで探究的な時間を生み出せるのかが課題である。加えて、山ほどある数学活用の場面から、どの話題を用いるかも他の数学科の教員と議論したいところである。

数学以外の知識があると有利

陸上 100 メートル走のストライドとピッチとタイムの関係
第 1 次〜第 3 次産業の意味、各産業の「就業者数割合」の歴史的経緯

以上は数学ⅠA の第 2 問、第 3 問のテーマである。これらの知識が乏しく、イメージできないと、文章をすべて読んで「いちから」理解しなくてはならない。とても時間が足りたものではない。一般教養、中学校までに学習する基本的な内容については、ひととおり押さえておく必要がある。一方、数学ⅡB については、統計の題材以外では数学以外の内容と絡めた出題はなかった。

また、言葉の定義や文脈をしっかりと押さえるため、国語力、特に語彙力や論理的に文章を把握する力が必要である。ある程度の早さで読解を進めないと解ききれないことに関しては、本当に数学の能力を判定しているのか不明である。情報を取捨選択し、「読み飛ばす」力も必要であろう。来年度からの新課程において国語科に「論理国語」が創設される流れからも、教科横断的にそのような力をつけるカリキュラムの検討を各学校で進めなくてはならない。

最後に

実際に解いてみた印象は、目新しさもあるが、記述式の試験に向けた対策をしていれば、対応できるというものであった。記述式の問題を解く過程では、定義について確認し、様々な解法・道具のどれを用いて解き進めていくのか自己対話し、最後までやりきる計算力でもって解答を導き、検証する。それらの複合的な能力を授業の中で磨いてほしい。それは試験対策の授業だけではなく、日常の数学の授業においても思考を深めるアプローチをしていかなくてはならない。

入試を突破するためではなく、数学的な力を駆使して人生を豊かなものにするという根本の目的を忘れたくはない。

第II部

寄稿

ニューラルネットの基礎数理：高校数学の観点から

大阪大学大学院基礎工学研究科　石渡通徳

1　ニューラルネットとは何か

1.1　本稿の目的

近年「ニューラルネットワーク」「機械学習」といった言葉が, 実社会でもよく聞かれるようになりました. 例えば：

- (音声認識) ニューラルネットによる音声認識によって会話しながら人間をサポートするアプリが出現する,
- (機械制御) 自動運転にディープラーニングが応用されているため世界各国の自動車メーカーがニューラルネットの研究を行っている,
- (文献検索) 新型コロナの治療薬を, これまでに出版された世界各国の論文データベースからニューラルネットを用いた検索により探求する,
- (言語解析) ディープラーニングの応用により機械翻訳の精度が格段に向上する,
- (テキスト解析) 迷惑メールをスクリーニングする迷惑メールフィルタの精度がニューラルネットベースの技術によって飛躍的に向上,
- (画像認識) 中古車販売会社が, 持ち込まれた中古車の査定をニューラルネットで行い人手と必要日数を大幅に短縮,

など, 極めて広い分野に応用され, 日進月歩で開発が進んでいます ([4], [5]). また現在では python など手軽にニューラルネットを構築できる言語も一般に普及しており, 大企業だけではなく一個人でもニューラルネットを用いて自分のさせたいことをさせられる時代に突入しつつあり, 各国政府もこうした動きに対応できる人材を教育・再教育するため, 各種プロジェクトを策定し大きな予算が投入されています (「第四次産業革命」「society 5.0」「数理資本主義」).

本稿では, 高校までの数学の知識の自然な延長上で

$$\text{ニューラルネットとは何か} \tag{1.1}$$

を考えてみたいと思います. 本稿の結論は「ニューラルネットは関数である」というものなのですが, これをなるべく説得的に議論できればと思っています.

まず初めに全体的な感覚をつかんでもらうために, 冒頭で挙げたニューラルネットのいくつかの応用例のうち「画像認識」を例にとり解説をします. 特に「与えられた画像が猫の画像かどうか」を認識するニューラルネット, つまり

> 与えられた画像を読み込んで, その画像が
>
> $$\text{「猫である」か「猫でない」を判定する} \tag{1.2}$$
>
> ニューラルネット

を考えましょう. このニューラルネットを「機能面」から考えると, 高校数学で学んだどの概念に当たるでしょうか？

1.2 ニューラルネットの機能とは

関数としてのニューラルネット：日常言語による表現　このニューラルネットの機能は以下のように図式化されます：

$$\text{入力画像} \to \boxed{\text{ニューラルネット}} \to \text{判定結果 (猫か猫でないか)}$$

高校「数学 I」における「関数」の概念を理解している方であれば, これは

(a) 「入力画像」に

(b) 「判定結果」を対応させる

(c) 関数 (function = 機能)

であること, 特に次の構造を持つことはすぐにわかります：

(a) 始集合 X は

$$X := \text{「画像の集合」}, \tag{1.3}$$

定義域は「読み取るように準備された画像全体からなる集合」です.

(b) 終集合 (いまは値域と同一視) Y は

$$Y := \{\text{「猫である」}, \text{「猫でない」}\} \tag{1.4}$$

という「二つの文からなる集合」です.

(c) 最後の「対応ルール」は？ニューラルネットはまさにこの対応を実行しているわけです. 高校課程であれば, 対応は「表」または「式」で表現されました.

例えばニューラルネットの機能すなわち「対応ルール」の「表による表現」は

入力	出力
画像 1	「猫である」
画像 2	「猫である」
画像 3	「猫でない」
⋯	⋯

とでもなるでしょう. しかしこんな表を眺めていても, 余り実用的ではない (「役に立たない！」) ように見えます. 後に, ニューラルネットが与える対応の「式による表現」を考えます.

以上で, 「関数としてのニューラルネット」の「高校『数学 I』」の立場からの分析の, すぐやれるところはとりあえず終了です. つまり

> 「与えられた画像が猫の画像かそうでないか認識するニューラルネット」は, X から Y への「関数」と見做せる

ということがわかりました. ただし X, Y はそれぞれ (1.3), (1.4) で定まる集合です.

関数としてのニューラルネット：数式による表現　「西欧科学の言語は数学」ですので, ニューラルネットを「科学的に扱おう」とするならば, 以上 (a), (b), (c) をまず「和文数訳」することが必要となります.

まず始集合の要素はどのように数量化されるでしょうか？これは「画像データはどのように数量化されるか」という問です. 画像データは, 計算機内では

(i) 画像を小さな単位 (画素, ピクセル) に分割し,

(ii) 各ピクセルの「色」を R (赤), G (緑), B (青) がどの程度の強度で入り混じっているかを数値 (普通自然数) で表現する

ことで扱われます. すなわち

- 「入力画像データ一つ」(例えば「一枚の車」の画像) は, ピクセル数を N, ピクセル j での R, G, B の強度を表す数をそれぞれ (r_j, g_j, b_j) とすると, 「ピクセル 1 の色調データ (r_1, g_1, b_1), ピクセル 2 の色調データ (r_2, g_2, b_2), ⋯ ピクセル N の色調データ (r_N, g_N, b_N)」, つまり

$$((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2), \cdots, (r_N, g_N, b_N))$$

という,

$$\text{「自然数の } 3N \text{ 個の組」} = \text{「} \mathbb{N} \text{ 上の } 3N\text{-次元ベクトル」}$$

($\mathbb{N}$ は「自然数全体からなる集合」) で表されます.

- よって「入力画像が属する集合」, つまり「始集合」は

$$X = \text{「自然数の } 3N \text{ 個の組」全体の集合} = \mathbb{N}^{3N}$$

(最後の集合は「$\mathbb{N}$ の $3N$ 個の直積集合」の記号) ,「実際にニューラルネットに読ませる画像全体の集合」, つまり「定義域」はこの部分集合となります.

終集合の数量化は簡単です. 面倒なので

- 「猫である」を 1,
- 「猫でない」を 0

と省略することにすれば, 終集合は

$$Y = \{0, 1\}$$

と「数量化」して記述できることになります.

以上から,「猫の画像を識別するニューラルネット」は

$$N : \vec{n} \in \mathbb{N}^{3N} \to \{0, 1\} \ni y$$

という関数で表現されることがわかりました. 最後に残ったのは「このニューラルネットがどのような規則で『入力』と『出力』を関係づけるのか」を式で表現すること, すなわち $y = N(\vec{n})$ を与える N を与えることです. 次の section では「N はどうやって『作られる』のか」をお話しすることにします.

1.3 ニューラルネットの目的とは

さて実際に (1.2) の機能を持つニューラルネットを納品することを考えましょう.

- とにかくまずはプロトタイプ N_0 を作ります. これができたとしましょう.
- とりあえず作りはしましたが, やっつけで作業をして作ったので,

  $$N_0 \text{ はあまり性能がよくありません.} \tag{1.5}$$

  つまり

  - 「車の画像」を入力したのに出力 1 (=「猫の画像である」) を返したり, 逆に
  - 「猫の画像」を入力したのに出力 0 (=「猫の画像でない」) を返したり,

  ということがしばしばおこります.

- この場合, N_0 を改良して,

  $$\text{より性能の良い } N_1 \text{ を作る} \tag{1.6}$$

  ことを考えなくてはなりません.

ここで考えたいのは「どうやって改良するか」という技術論ではなく,

$$\text{「ニューラルネットは関数である」という枠組みで,「性能の良し悪し」は どう定式化されるか} \tag{1.7}$$

という,「性能の良し悪し」という和文の「和文数訳」に関する事柄です.

ニューラルネット N_0 と N_1 について「N_1 は N_0 より性能が良い」とはどういうことでしょうか. 例を考えてみましょう.

- 「正解ラベル付き画像」を例えば 100 枚用意しましょう.
  - 「画像 1」は「人間が見ると『戦車』の画像」ですので, 「画像 1」の正解ラベルは 0 (「間違い」),
  - 「画像 2」は「人間が見ると『三毛猫』の画像」ですので, 「画像 2」の正解ラベルは 1 (「正しい」),
  - 「画像 3」は「人間が見ると『ダンプカー』の画像」ですので, 「画像 3」の正解ラベルは 0 (「間違い」),
  - $\cdots$

  といった「正解ラベル」付き画像が 100 枚用意されているとします. $T(x)$ で「画像 x の正解ラベル (**t**eacher's label /**t**raining label)」を表すこととします. 上の例では

  $$T(1) = 0, \quad T(2) = 1, \quad T(3) = 0, \quad T(4) = 0, \quad T(5) = 1, \quad T(6) = 0, \quad \cdots \tag{1.8}$$

  です. この「正解ラベル付き画像」を用意するにあたっては, ニューラルネットは何も関係していないことに注意してください.

- この 100 枚の画像をニューラルネット N_0 に入力したところ, 「画像 1 に対する出力値 $N_0(1)$」, 「画像 2 に対する出力値 $N_0(2)$」, $\cdots$, 「画像 100 に対する出力値 $N_0(100)$」として.

  $$N_0(1) = 0,\ N_0(2) = 0,\ N_0(3) = 1,\ N_0(4) = 1,\ N_0(5) = 1,\ N_0(6) = 1,\ \cdots \tag{1.9}$$

  を得ました. この場合, 例えば「画像 2 (三毛猫の画像, 正解ラベルは 1)」に対して, N_0 は出力 0, すなわち「画像 2 は『猫の画像でない』」という答えを返しているので, あまり性能がよくありません.

- 一方, この 100 枚の画像を N_0 とは別のニューラルネット N_1 に入力したところ, 「画像 1 に対する出力値 $N_1(1)$」, 「画像 2 に対する出力値 $N_1(2)$」, $\cdots$, 「画像 100 に対する出力値 $N_1(100)$」として,

  $$N_1(1) = 0,\ N_1(2) = 1,\ N_1(3) = 0,\ N_1(4) = 1,\ N_1(5) = 1,\ N_1(6) = 0,\ \cdots \tag{1.10}$$

  を得ました.

以上の下で, N_0 と N_1 は, どちらが「性能が良い」でしょうか？

(画像 6 までのデータを比較すると)

- 「正解ラベル (1.8) と N_0 の出力値 (1.9) が一致」するのは画像 1, 画像 5 の 2 つだけ, 一方
- 「正解ラベル (1.8) と N_1 の出力値 (1.10) が一致」するのは画像 1, 画像 2, 画像 3, 画像 5, 画像 6 の 5 つ.

これらを見ると, 画像 6 までのデータの比較においてですが, N_1 の方が N_0 より「正解ラベル」と一致する出力値が多い, つまり「N_1 の方が性能が良い」と結論付けられます.

以上の手順を振り返ってみましょう.

まずニューラルネット N_0, N_1 を, それぞれ「『画像』を入力, 『0, 1』を出力とする『関数』」と見做すのでした. そしてこれらの出力値 (関数値) と「T の出力である正解ラベル」を比較し, 一致する画像の数が多い N_1 を「N_0 より性能が良い」と結論付けました.

ここで「正解ラベル」T を見てみると, これも「『画像』を入力, 『0, 1』を出力とする『関数』」と見做せることがわかります. この関数は, 画像を見たときの人間の判断を表す関数で, ニューラルネット N_0, N_1 は人間の判断 T を「再現したい」わけです.

これより

ニューラルネットの目的は何か

「ニューラルネット」は

(a) 人間の判断 (「正解」) を表す「与えられた関数」があるとして,

(b) その関数を (人間ではなく)「人工的な関数 (アルゴリズム) により近似したい」ときに,

(c) 近似関数 (近似アルゴリズム) を設計する一つの方法を与える

ことがわかりました.

また, この理解の下では「ニューラルネットの改良とは, (b) の近似精度を上げるように関数 (アルゴリズム) を改良していくこと」と定式化できます (この「改良」を, アルゴリズムを組んで「自動的に」行うことを「機械学習」と呼びます).

要するに, 高校数学の用語を使うならば, 世間で行われている「優れたニューラルネットの開発」はすべて, 「与えられた関数に対する, より良い近似関数 (アルゴリズム) の開発」ということになります.

2　実関数を近似するニューラルネットの仕組みと「万能近似定理」

本 section で扱うニューラルネットの紹介：実関数近似ニューラルネット　ニューラルネットを「(人間の判断を表す) 与えられた関数を近似する」アルゴリズムとして捉えることができることは前 section で議論しましたが, 前 section で考えた「与えられた画像が

猫かどうか判断する」ような一般のニューラルネットを議論すると記号が大変なので, ここでは

$$\text{実数の入力 } x \text{ に対して実数 } y \text{ を出力する} \tag{2.11}$$

簡単なニューラルネットのモデルを考えることにします.

さて f を与えられた関数 (前 section の言葉では「人間の判断を表す関数」) として, 次の問題を考えましょう：

問題

f を「近似する」ニューラルネットを設計せよ.

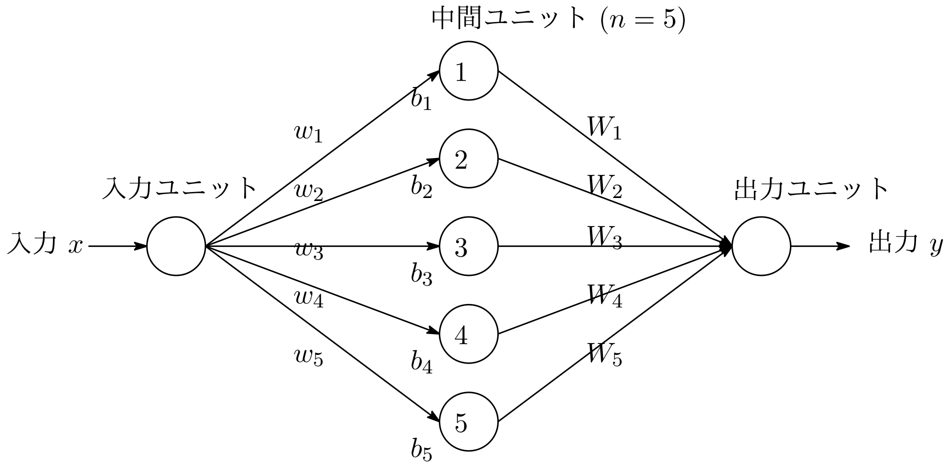
例えば $f(x) = x^2$ であれば「$y = x^2$ を『近似する』ニューラルネットを設計せよ」という問題を考えるわけです

2.1 「実関数」を近似するニューラルネットの仕組み

ニューラルネットの仕様　実関数を近似するニューラルネットの作動アルゴリズムは以下の通りです. まずニューラルネットは

- 「1 個の入力ユニット」「n 個の中間ユニット」「1 個の出力ユニット」からなり,
- 「入力ユニット」から「中間ユニット」へ, 「中間ユニット」から「出力ユニット」へ情報が伝達される, という形で入力を処理する

とします.



このニューラルネットを特徴づけるパラメータは

- 「入力ユニット」から「j 番目の中間ユニット」への「重み」w_j,
- 中間ユニットの入力と出力の関係を表す「活性化関数」 $a = a(\cdot)$ (中間ユニットに共通の関数),

- 「j 番目の中間ユニット」の「バイアス」b_j,
- 「j 番目の中間ユニット」から「出力ユニット」への「重み」W_j

です ($j = 1, \cdots, n$). これらのパラメータは全て正の実数であって, 「すでに与えられている」とします. もともとのニューラルネット (神経細胞網) の文脈では, 各「ユニット」は「神経細胞」,「活性化関数」は「『入った信号に対し各神経細胞がどのような信号を発出するか』を表す関数」となります (代表例はシグモイド関数).

各ユニットの働きは以下の通りです (上の図をたどりながら読んでください) :

(a) 入力ユニットの行う処理 : 受け取った値をそのまま出力するだけ. つまり

(i) 「入力ユニット」に入力 x が入力される.

(ii) この値 x はそのまま「j 番目の中間層」へ出力される.

(b) 中間ユニットたちの行う処理 : 入力ユニットから受け取った値を重み付けし, 関数に代入して出力ユニットへ出力する. つまり

(i) 「j 番目の中間層」には (x 自体が入力されるのではなく), j ごとに定まっている「重み」w_j と「バイアス」b_j によって $z_j := w_j x + b_j$ と重み付け処理された値が入力される.

(ii) 「j 番目の中間層」はこの「重み付けられた入力」z_j を処理し, 値 $a(z_j)$ が「出力ユニット」へ出力される.

(c) 出力ユニットの行う処理 : 中間ユニットたちから受け取った値を重み付けして, 最終出力をつくる. つまり

(i) 「出力ユニット」には,「j 番目の中間ユニット」からの入力 $a(z_j)$ に重み W_j を掛けてすべての中間ユニットについて足し合わせた $\sum_{j=1}^{n} W_j a(z_j)$ が入力される.

(ii) この値 $\sum_{j=1}^{n} W_j a(z_j)$ がこのニューラルネットの全体としての出力になる.

結果的に得られる「ニューラルネット全体の出力」$g(x)$ は

$$y = g(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j a(z_j) = \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j x + b_j) \tag{2.12}$$

となります. これが前 section で延期した「ニューラルネットの入力 x と出力 y を結ぶ式」です. 主要部は

x を $\omega_j x + b_j$ に移す関数と, a の合成関数

で, これを重み W_j を掛けて j について和を取った形になっています.

2.2　ニューラルネットはなぜ「万能」か：本稿で紹介する主定理

さて上記のニューラルネットが「関数近似器」として実際に有効であるには,

「機械学習」の前提にある信念

適切な方法でパラメータを調整すればするほど,「入力 x に対するニューラルネットの出力 $N(x)$ は『真値』$f(x)$ に近づいていく」

ことが保障されることが必要です. これがなかったら, いくら「機械学習」をニューラルネットにさせても, 近似したい関数をきちんと精度よく近似するようにニューラルネットが更新されるかどうかは偶然にすぎないということになり, ニューラルネットと機械学習の分野は結局ギャンブルと同じということになってしまいます.

実はニューラルネットが原理的に任意の精度で関数を近似できること, つまり「ニューラルネットの万能近似性」は, 微積分学 (の先の分野である「関数解析学」「測度論」) を用いて証明できます[1]. 本 subsection では K. Funahashi [2] による「万能近似定理」を紹介します. この定理が本稿の中心です.

主張を書く前に記号と仮定をまとめます：

- 閉区間 $[0,1] = \{x;\, 0 \leq x \leq 1\}$ 上で定義された連続関数 $h(x)$ の最大値を $\max_{x\in[0,1]} h(x)$ と書きます.

- 以下活性化関数は「シグモイド関数」

$$a(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

  (z は実数) であるとします.

以上の準備の下, ニューラルネットの「万能近似性」を保証するのが以下の定理です：

定理 2.1 (万能近似定理, [2])
f を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 n, 実数 $w_1, \cdots, w_n, b_1, \cdots, b_n, W_1, \cdots, W_n$ が存在して,

$$\max_{x\in[0,1]} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j x + b_j) \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

本稿残りでは, **定理 2.1** が, 実際に「ニューラルネットの万能近似性」すなわち

$$\text{ニューラルネットが「与えられた関数を任意精度で近似できる」こと} \tag{2.13}$$

[1] 万能近似定理があるからといって, この近似性を実現するニューラルネットを学習させる機械学習アルゴリズムが存在するかはまた別の問題です. この点, 機械学習の業界には混乱があるように見受けられます.

を主張していることを, 高校数学の「数の体系」のお話をベースに論じます. これに当たって, 高校数学の単元のいくつかを「公式の運用」でなく「概念の理解」を中心に復習し, さらに若干の知見を拡充する必要があります.

3 「万能近似定理」の主張の解読

3.1 実数の近似とは

高校「数学 I」でやった通り, $\sqrt{2}$ は有理数ではありません. これは古代ギリシャで証明された主張ですが, $\sqrt{2}$ を「比の数」として表せないということで, 実用上も困った事態でした. そこで,「$\sqrt{2}$ を有理数で近似すること」が, 古代ギリシャ以来論じられてきました. 19 世紀末までの長い西欧数学の歴史では, まず

$$\text{「}\sqrt{2}\text{ を有理数で近似する」とはそもそもどういうことか} \tag{3.1}$$

が問題となりました. 本稿ここで考えたいのは「(3.1) を数学的に定式化するにはどうすればよいか」, つまり「『近似』とは何か」の「和文数訳」です.「『$\sqrt{2}$ を有理数で近似しなさい』といわれたとき, 実際にどういう行動をするか」を考えてみると：

(a) まず「許される誤差の幅」例えば $\varepsilon = 0.1$ が与えられたとしましょう. 以下

$$\begin{array}{l}\sqrt{2}\text{ との差の大きさが }0.1\text{ より小さくなる}\\ \text{ような有理数 }q\text{ があるか,}\end{array} \tag{3.2}$$

つまり

$$|\sqrt{2} - q| < 0.1 \text{ を満たす有理数 } q \text{ があるか} \tag{3.3}$$

を考えます. (手計算により) $q_1 = 1.4$ であれば $|\sqrt{2} - q_1| < 0.1$ が成り立つことがわかりますので,「与えられた許容範囲 $\varepsilon = 0.1$ に対しては, (3.3) は OK である」ことがわかりました.

(b) 以下 $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001 \cdots$ と取り直して同様の考察を繰り返します. すると, $|\sqrt{2} - q| < \varepsilon$ を実現する有理数 q がいつも見つかることが体験されます.

以上の作業を経て,

$$\sqrt{2}\text{ が有理数で近似できる}$$

とは,

$$\begin{array}{l}\text{どんな「許容誤差」}\varepsilon\text{ (正の実数) が与えられても, それに応じて有理数 }q\text{ を}\\ \text{うまく取れば,「誤差 }\sqrt{2}-q\text{ の大きさ」を }\varepsilon\text{ よりも小さくすることができる}\end{array} \tag{3.4}$$

ことと「和文数訳」してもそう問題はなさそうです.

これを $\sqrt{2}$ から一般の実数に広げて,

実数が有理数で近似できる

ことの「和文数訳」として以下の定義を置きます：

定義 3.1 ($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ での稠密性)
「実数が有理数で近似できる」とは, 任意の実数 r に対して

どんな「許容誤差」ε (正の実数) が与えられても, それに応じて有理数 q を
うまく取れば, $|r-q|<\varepsilon$ とすることができる (3.5)

ことをいう. このとき「有理数全体からなる集合 $\mathbb{Q}$ は, 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ で稠密 (ちゅうみつ) である」という. ∎

一つ注意を喚起したいことは,

(3.4) にある「(誤差の) 大きさ」という日本語が,
(3.5) では「絶対値」という数学語に翻訳されている (3.6)

点です. つまりここでは, 日々の言語実践と数学に関わる実践を踏まえ, 日常用語「大きさ」は, 数学の概念「絶対値」に対応すると考えているわけです.

ここで「絶対値」に関する基本的事実をまとめておくと：

定義 3.2 (絶対値)
$a\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ は「実数全体の成す集合」) に対してその絶対値 $|a|$ を

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

で定める. ∎

命題 3.1
$|\cdot|$ は以下を満たす：任意の実数 x, y, a に対して,

$$|x|\geq 0,\quad |x|=0 \text{ ならば } x=0, \tag{3.7}$$

$$|ax|=|a||x|, \tag{3.8}$$

$$|x+y|\leq |x|+|y|. \tag{3.9}$$

(3.9) を「三角不等式」と呼ぶ. ∎

これらの事実は,「関数の近似とは何か」を考える際に中心的な役割を果たします.

3.2 関数の近似とは

「数の近似」の書き換え 私たちの問題は (実数の近似ではなく)

- 「ニューラルネットによって生成される関数が, 与えられた関数 f を近似できる」という文の和文数訳, 及び
- **定理 2.1** がこのことを主張していることの確認

でした．これを行うために，まず**定義 3.1** にある「実数全体の集合」を「集合 X」に，「有理数全体の集合」を「集合 Y」に書き直してみます：

「定義」 3.1 (Y の X での稠密性)
「集合 X の元が集合 Y の元で近似できる」とは，任意の $f \in X$ に対して

> どんな「許容誤差」ε (正の実数) が与えられても，それに応じて $g \in Y$ をうまく取れば，$|f - g| < \varepsilon$ とできる

ことをいう． ∎

ここで私たちは，**定理 2.1** をにらんで

> X として「閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体の成す集合」$C([0,1])$，
> Y として「ニューラルネットが作り出せる関数全体の成す集合」N

に取ることを考えます．(2.12) を見ると，N は

$$N := \left\{ \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j x + b_j);\ n \in \mathbb{N},\ (w_j)_{j=1,\cdots,n} \subset \mathbb{R},\ (b_j)_{j=1,\cdots,n} \subset \mathbb{R},\ (W_j)_{j=1,\cdots,n} \subset \mathbb{R} \right\} \tag{3.10}$$

と定められる集合です．

以上の記号の定義のもとに，**「定義」3.1** を書き換えると：

「定義」 3.2
「集合 $C([0,1])$ の元が集合 N の元で近似できる」とは，任意の $f \in C([0,1])$ に対して

> どんな「許容誤差」ε (正の実数) が与えられても，それに応じて $g \in N$ をうまく取れば，$|f - g| < \varepsilon$ とできる

ことをいう． ∎

となります．
この文章も一点だけ，このままでは理解ができない部分があります．それは最後の

$$\text{「うまく取れば，} |f - g| < \varepsilon \text{ とできる」} \tag{3.11}$$

の部分です．**定義 3.1** では r, q は「数」でしたから，

$$\text{「うまく取れば，} |r - q| < \varepsilon \text{ とできる」} \tag{3.12}$$

の $|\cdot|$ は「実数の絶対値」として意味がありました．しかし**「定義」3.2** では f, g は数ではなくて関数です．よって (3.12) は

(i) きちんと書くなら「独立変数を表す記号 (x) を補足」して

$$「うまく取れば, |f(x)-g(x)|<\varepsilon とできる」 \tag{3.13}$$

と書くべきです．すると,「$|f(x)-g(x)|$」はいまだ x を変数として含んでいますから,「どういう x に対して $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ とできるのか」も書かないと意味が通りません.

(ii) もしくは, (3.12) にある「$|\cdot|$」を,「数の絶対値」は「数の大きさ」を意味していたのでこれを「まねて」

関数 $f-g$ の大きさ

と捉える手もあります．しかし今のところ

「関数の『大きさ』」とは何を意味するか不明

です.

というわけで, (i), (ii) どちらを取るにせよ,

(3.11) は何を言っているか意味不明

ということになりました．実は (i), (ii) は同じことの技術的側面と意味的側面なので, この困難を, (ii) の表現

$$「関数の『大きさ』」とは何か意味不明 \tag{3.14}$$

で以下参照することにしましょう.

というわけで,「実数が有理数で近似できること」($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ での稠密性) を述べる「**定義 3.1** の「関数バージョン」を書こうとすると,

本稿最後の問題

「関数の大きさ」とは何か, どう定めるべきか

という問題に突き当たることになりました.

「関数の大きさ」とは：ノルム　ここで, 人のものの考え方 (「認識」) には

「意味 (直観)」と「ルール (論理, 形式, 構造)」

の二つの側面があることを思い出します.「関数の大きさ」に関して直面した困難はこのうちのいずれかというと, (3.14) を見れば「**意味**」の側面での困難でした．従って,

ルールの側面から「関数の大きさ」とはどのようなものかを考える

手が残っています.

すでに「数の大きさ」つまり絶対値は, **命題 3.1** にあるルールに従うことを復習しました (高校「数学 I」で学ぶことでした)．そこで,「関数の大きさ」$\|\cdot\|$ とは,

- 「関数 f」に「(『その大きさ』と解釈されるべき) **実数** $\|f\|$」を対応させる写像で,
- **命題 3.1** で「$|\cdot|$ を $\|\cdot\|$ に置き換えたルール」を満たす

ならば「何でもよい」と考えてみます. また,「関数の大きさ」といってしまうと, どうしても「大きさ」という言葉の直観的側面に引きずられて「その意味は何？」と考えたくなりますので, 用語を変えて「関数のノルム」という言葉を使うことにします：

定義 3.3 ($C(I)$ **上のノルム**)
$\mathbb{R}$ の閉区間 I 上の連続関数全体からなる集合 $C(I)$ に対して, 写像 $\|\cdot\| : C(I) \to \mathbb{R}$ が, 任意の関数 $f, g \in C(I)$ と実数 a に対して,

$$\|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \text{ ならば } f = 0, \tag{3.15}$$

$$\|af\| = |a|\|f\|, \tag{3.16}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{3.17}$$

を満たすとき, $\|\cdot\|$ を「$C(I)$ 上のノルム」と呼ぶ. ∎

実数の絶対値と同じく (3.17) を「三角不等式」と呼びます. 繰り返しになりますが, 上を満たす $\|\cdot\|$ に対し, 実数 $\|f\|$ を「『関数』f の大きさ」と**解釈する**わけです.

以上を踏まえたうえで, **定理 2.1** を見直してみますと, どうも結論

$$\max_{x\in[0,1]} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j x + b_j) \right| < \varepsilon$$

は

> 元の関数 f と, これを近似するニューラルネットが生成した関数 $\sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j \cdot + b_j)$ の「差の大きさ」が ε より小さい

ことを言っているようにも見えてきます. すなわち, **定理 2.1** では,「関数 h に対してその『大きさ』を

$$\|h\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |h(x)| \tag{3.18}$$

と定めているのではないか」という発想が見えてきます.

あとは, 上で定義された $\|\cdot\|_\infty$ が**定義 3.3** を満たすことが確認できれば話は閉じます. これは実際に正しい主張です：

命題 3.2
(3.18) で定められる $\|\cdot\|_\infty$ は $C(I)$ 上のノルムである. ∎

$\|\cdot\|_\infty$ は「f の最大値」で定義されるので, 「f の最大値ノルム」といいます. これで**「定義」3.2** を「きちんとした定義」として完成させることができます：

定義 3.4
「集合 $C([0,1])$ の元が, 集合 N の元で, 最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ の意味で近似できる」とは, 任意の $f \in C([0,1])$ に対して

> どんな「許容誤差」ε (正の実数) が与えられても, それに応じて $g \in N$ をうまく取れば, $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ とできる

ことをいう. このとき (**定義 3.1** をまねて)「N は, $C([0,1])$ で, 最大値ノルムの意味で稠密 (ちゅうみつ) である」という. ∎

実は「関数空間 $C(I)$」の次元は「無限次元」であることを反映して, $C(I)$ 上には「本質的に異なる」ノルム (「非同値なノルム」) が存在します. よって「別の近さの測り方 (別のノルム) を用いて**定理 2.1** を書き換えるとどうなるか」といった疑問が自然に生じるわけです [3] (実用上も, より計算機となじみのあるノルムが発見できると都合がよい). こうした研究は「関数解析学」「機械学習」「ニューラルネット」の境界領域に位置する研究テーマで, 現在でも盛んに研究されています.

3.3 まとめ：定理 2.1 の「数文和訳」とその先

定理 2.1 の「数文和訳」 **定義 3.4** を具体的に書き下しましょう. 問題になるのは

「$g \in N$ をうまく取れば」

の部分です. これは, 精確には

「$g \in N$ を満たす g が存在して」

と書き直せるでしょう. N の定義 (3.10) を見ると

> 「$g \in N$ を満たす」とは,「ある
>
> - (中間ユニットの数) $n \in \mathbb{N}$,
> - (入力ユニットから中間ユニットたちへの「重み」の族) $(w_j)_{j=1}^n$,
> - (中間ユニットたちの「バイアス」の族) $(b_j)_{j=1}^n$
> - (中間ユニットたちから出力ユニットへの「重み」の族) $(W_j)_{j=1}^n$,
>
> が存在して $g(x) = \sum_{j=1}^n W_j a(w_j x + b_j)$ と書ける」

ことに他なりません.

以上の準備の下で**定義 3.4** ($C([0,1])$ における, N の $\|\cdot\|_\infty$ の意味での稠密性) は,

「任意の $f \in C([0,1])$ に対して

(i) どんな「許容誤差」ε (正の実数) が与えられても,

(ii) それに応じてある

- (中間ユニットの数) $n \in \mathbb{N}$,
- (入力ユニットから中間ユニットたちへの「重み」の族) $(w_j)_{j=1}^n$,
- (中間ユニットたちの「バイアス」の族) $(b_j)_{j=1}^n$
- (中間ユニットたちから出力ユニットへの「重み」の族) $(W_j)_{j=1}^n$,

が存在して

(iii)

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j \cdot + b_j) \right\|_\infty < \varepsilon$$

とすることができる

と書き直せます. (iii) を「最大値ノルム」を使わずにあらわに書くと

$$\max_{x \in [0,1]} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j x + b_j) \right| < \varepsilon$$

ですから, 上の囲みはまさに**定理 2.1** の主張に他なりません.

以上から,

「万能近似定理」定理 2.1 の意味

「万能近似定理」**定理 2.1** は,

(a) 「『近似したい関数と, ニューラルネットが生成する近似関数の許容誤差』ε に対し」,

(b) 「中間ユニットの数, 重み, バイアスなどを適切にチューニングすれば」

(c) 「$\|f - \sum_{j=1}^{n} W_j a(w_j \cdot + b_j)\|_\infty < \varepsilon$, つまり『近似したい関数と, ニューラルネットが生成する近似関数の誤差を許容範囲 ε より小さくできる』」,

すなわち「N は $C([0,1])$ で, $\|\cdot\|_\infty$ の意味で稠密」を主張する定理

であることがわかりました.

定理 2.1 の改良へ向けて　ニューラルネットの設計には「中間ユニットの数 n」が重要であるのに, **定理 2.1** では n について何も触れられていません. どうなっているのでしょう

か？この点に関する考察は結局「**定理 2.1** は『実用性』の観点から言って改良されなくてはならない」という結論を導きます．以下これを説明し，最後にこの要請に従って開発された新しい定理を紹介します．

実際のニューラルネットの設計では，「中間ユニットの数 n」は，近似したい関数 f に先だってあらかじめ与えられるものです．一方，**定理 2.1** の主張では，n は，「与えられた f ごとに十分大きくとる」という形で f に依存して決まるので，**定理 2.1** は実際のニューラルネットの構造を反映したものとは言えません．

また**定理 2.1** では「中間ユニットの数 n」について「存在」が主張されているだけで，「f と誤差幅 ε を取ったとき，具体的にどのくらい大きく取ればよいか」についての情報は何もありません．従って，現実的にニューラルネットを設計する際には，n については関数近似とは別の判断基準 (計算機のスペックなど) によって決めるしかないわけです．

というわけで，**定理 2.1** は「ニューラルネットの万能近似性」の根拠としていい線を行っているのですが，実際の設計の観点から見ると少し「現実離れ」している面が否めません．そこで，このような欠点を改良した次の主張が成立するかという問いが生じます：

定理 3.1 (定理 2.1 の「一様」改良版, [1])

任意の $f \in C([0,1])$ に対して $C_f > 0$ があって (C_f は f から具体的に計算できる量です) 以下が成り立つ：任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(w_j)_{j=1}^n, \quad (b_j)_{j=1}^n, \quad (W_j)_{j=1}^n$$

を適切に取ると

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n W_j a(w_j \cdot + b_j) \right\|_\infty < \frac{C_f}{n} \tag{3.19}$$

が成り立つ． ∎

この主張も数学の定理として証明できます [1] (ニューラルネットの設計の現実と数学を結ぶ，良い結果です)．中間ユニットの数 n を十分大きくとると，(3.19) の右辺は十分 0 に近づきますので，この定理も「f がニューラルネットで生成される関数で任意精度で近似できる」ことを主張しています．

本稿では詳しく議論する余地がもはやありませんが，Barron によるこの定理の主張を「数文和訳」すると，

> **定理 2.1** では f ごとに決まっていた中間ユニットの数 n を，
>
> f に対して**一様**に取ることができる

(より詳しく言うと，「任意の $L > 0$ に対して，n は $C_f < L$ を満たす f に対して一様に取れる」) と翻訳できます．「一様性」という語を用いると，

(i) 「実際のニューラルネットの設計を反映する」という実用面から「n の f に対する一様性」を議論する必然性が生じ,

(ii) それに対する一つの答えが**定理 3.1** になる

わけです.

「一様性」は「数学の理論だけに関わるややこしいしよくわからないもので, これがわからなくても実社会での『応用』には何の影響もない」といったスタンスで扱われることが多いようですが, 上の (i) に述べたように,「**定理 3.1** にある一様性」は, 具体的なニューラルネットの設計という実社会での「応用」ニーズから出てきたものであることを, 改めて最後に指摘したいと思います.

参考文献

[1] A. R. Barron, Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function, *IEEE Transactions on Inforamtion Theory*, Vol. 39, No. 3 (1993), pp. 930-945.

[2] K. Funahashi, On the approximate relaization of continuous mappings by neural networks. *Newral Networks,* Vol. 2 (1989), pp. 183-192.

[3] K. Hornik, Approximation Capabilities of Multilayer Feedforward Networks. *Neural Networks,* Vol. 4, (1991), pp. 251-257.

[4] 日経ビッグデータ編. グーグルに学ぶディープラーニング. 日経 BP.

[5] 涌井良幸, 涌井貞美. ディープラーニングがわかる数学入門. 技術評論社.

光の弾性波理論

平尾 淳一

概要

ナヴィエによるモデルを中心に光の弾性波理論をその背景やその後の展開とともに紹介する．

■幾何光学　人間は視覚を通じて多くの情報を得ている．しかしながらその媒体である光そのものを理解することは難しい．視覚情報が直感的と感じられるのに対して実に対照的である．それでも光が直進することは古代からよく知られていて，光の進路を表すのに光線という概念が用いられ，それにもとづいて物質の境界面における反射や屈折の法則も知られていた．

■17 世紀の光学　ニュートン (Issac Newton, 1643-1727) の『プリンキピア』が執筆された 17 世紀には，光の直進性や反射・屈折の法則はフェルマ (Pierre de Fermat, 1601-1665) の原理によって定式化された．

ニュートンは万有引力の法則に代表される力学で知られるが，光に関する実験にもとづく理論においても大きく貢献している．プリズムを用いて白色光が単色に分解されること（分散）が明らかにされ，凸レンズと平板がつくる間隙で光の明暗が繰り返されること（ニュートンリング）が示された．しかしながら，ニュートンリングがもつ周期性は波動説にはただちに結びつくことはなかった．

これに対して，ホイヘンス (Christiaan Huygens, 1629-1695) は素元波の重ね合わせとして光の伝播機構を説明したが，ニュートンが光の粒子説を提唱したと見なされていたこともあり，以後しばらくの間，光の波動説が推進されることはなかった．

■光の波動説　19 世紀に入ると早々にこうした状況が一変する．立役者はヤング (Thomas Young, 1773-1829) とフレネル (Augustin Jean Fresnel, 1788 - 1827) である．ヤングは医者という経歴を持っていたこともあって，視覚と聴覚の研究から音と光の類似性を指摘した．アイディアをまとめた論文を発表したのは 1800 年のことであった [11]．その上で光を伝える弾性的な媒体エーテルが宇宙空間を満たし物質中にも浸透していること，色はエーテルに励起した波動の振動数に依存することを仮定して光の波動論を展開した [12]．二重スリットを用いた干渉実験は特に良く知られるが，ニュートンリングの実験結果から各色の波長を具体的に求めることもおこなっている．また，密な媒質中で光速が速くなるか遅くなるかによって光の波動論と粒子論のいずれが正しいか判定できると指摘している [13]．

光の干渉とは同一の光源から発せられた光が別々の経路を経て再び交わるときに経路差によって強弱が生じる現象である．干渉が起こる条件は光が物陰に回り込むことによって実現される．これを回折とよび，波動が一般的にもつ特徴である．回折はホイヘンスの原理によれば自然に理解されるが，光の回折は干渉を通じて実験的に認識される．干渉と回折は不可分のものと言えるだろう．

回折に関する記述は 17 世紀のグリマルディ (Francesco Maria Grimaldi, 1618-1663) によるものが残っている．ヤングも回折を認識していたが，それをうまく解析することはできなかった．この問題を解決したのはフレネル (Augustin Jean Fresnel, 1788 - 1827) であった．1815 には回折に関する最初の論文が提出されている [4]．ヤングが一連の論文を公表してからおよそ 10 年後のことである．いくつかの段階を経てフレネルはホイヘンスの原理と干渉の理論に基づく正確な数学的表現をまとめ上げることに成功し，1819 年のフランス科学アカデミーの懸賞論文に応募することになった．この懸賞論文で求められたのは

- 正確な実験による回折の観測
- 数学的表現によるその光線の説明

であった．審査委員のうち波動説を支持していたのはアラゴー (Dominique François Jean Arago, 1786-1853) だけでラプラス (Pierre Simon, Marquis de Laplace, 1749 - 1827)，ポアソン (Siméon Denis Poisson, 1781-1840) らは粒子説でこの問題が解決されると考えていたが，当初の予想に反して波動説がこの問題に決着を付けることとなったのである．

光が示すもうひとつの特筆するべき特徴は複屈折である．この現象も 17 世紀に発見されたことが知られる．1669 年にバルトリヌス (E. Bartholinus, 1625-1698) が複屈折を示す結晶（方解石）を発見し，その報告を受けたホイヘンスが分析している．これが再び脚光を浴びるのがやはり 19 世紀のことであった．きっかけを与えたのはマリュス (Etienne Louis Malus, 1775-1812) であった．彼は反射光を調べることを通じて，複屈折の現象を方解石という特殊な結晶のみに依存するものではなく，光のもつ一般的な特性（偏光）として捉えるべきだと考えるに至った (1808).

フレネルはアラゴーとともに偏光の研究も行っている．とくに複屈折によって生じた 2 本の光線同士は干渉しないことを確認したことは重要である．こうしたことから光の振動は進行方向に直角方向に生じる，すなわち光は横波であると考えることになった．フレネルが最終的に横波理論を公表したのは 1821 年のことであった [5]．さらに 1823 年に力学との類推から媒質境界における偏光面を考慮した光の反射と屈折の法則を導いている．以下に述べるように弾性体理論からは横波に加えて縦波の解が得られるが，縦波の進行速度が極めて大きいものとして解決を図ることになる．

■ナヴィエの弾性体理論　フレネルの諸発見をきっかけにして多くの人々が光の波動モデルの研究に取り組んだ．この中で第一人者としてあげられるのがナヴィエ (Claude-Louis-Marie-Hanri Navier, 1785-1836) である．すでにニュートン力学は 18 世紀のあいだにオイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) らによって弾性弦や流体，弾性体などの問題に応用されていた．19 世紀に入ると電磁気現象に関する発見が相次ぎ，この分野の研究が急速に進歩するが，マクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831-1879) によって電磁気学が定式化されるのは 19 世紀中葉以降のことである．それまで光の波動は弾性波をおいて他に考えられなかった．

ナヴィエは媒質を微粒子の集合とみなし，それらの間の中心力を考えて媒質の釣り合いと運動方程式を導出した．論文が提出されたのはフレネルの横波理論と同じ 1821 年のことであった [8]．ここで彼の論文を少し詳しく追っていくことにする．

近接する 2 粒子 M，M$'$ の位置をそれぞれ O $(0, 0, 0)$，P (x, y, z) とする．この媒質に外力が働くことによって，これらの粒子がそれぞれ $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$，$\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u} = (u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z)$ だけ変位して O$'$，P$'$ に変位したとしよう．2 粒子が互いに近接しているとすれば

$$\begin{aligned}\delta u_x = &\frac{\partial u_x}{\partial x}x + \frac{\partial u_x}{\partial y}y + \frac{\partial u_x}{\partial z}z \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}z^2 + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}xy + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y\partial z}yz + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial x}zx + \cdots\end{aligned} \tag{1}$$

と展開される．δu_y，δu_z も同様である．ここに現れる偏微分は O における値である．

変位前後の分子間の距離 $r(= |\mathrm{OP}|)$，$r'(= |\mathrm{O'P'}|)$，はそれぞれ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x + \delta u_x)^2 + (y + \delta u_z)^2 + (z + \delta u_z)^2}$$

となる．変位 $\delta\boldsymbol{u}$ が十分に小さいものとして

$$(x + \delta u_x)^2 \fallingdotseq x^2 + 2x\delta u_x$$

などとすれば

$$r' \fallingdotseq \left\{x^2+y^2+z^2+2(x\delta u_x+y\delta u_y+z\delta u_z)\right\}^{1/2} \fallingdotseq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(1+\frac{x\delta u_x+y\delta u_y+z\delta u_z)}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

すなわち

$$r'-r \fallingdotseq \frac{x\delta u_x+y\delta u_y+z\delta u_z}{\sqrt{x^2+\delta y^2+z^2}} = \frac{x\delta u_x+y\delta u_y+z\delta u_z}{r}$$

となる．ここで，OP と x 軸，y 軸がなす角をそれぞれ p，q，OP の xy 平面への射影と OP のなす角を ψ とおくと

$$x = r\cos p, \quad y = r\cos q, \quad z = \sin\psi \tag{2}$$

であり，

$$r'-r = \delta u_x \cos p + \delta u_y \cos q + \delta u_z \sin\psi \tag{3}$$

となる．

ここで，距離 r の増加とともに急速に減少し 0 に収束する関数 $\kappa(r)$ を用いて，分子間に働く力の大きさを

$$\kappa(r)\cdot(r'-r) = \kappa(r)\cdot(\delta u_x \cos p + \delta u_y \cos q + \delta u_z \sin\psi) \tag{4}$$

とする（図 1）．

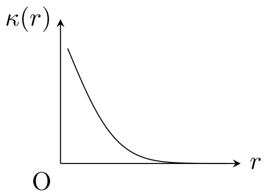


図 1　「ばね定数」κ の距離依存性

このとき力の各方向の成分 $(f_x,\ f_y,\ f_z)$ は

$$(\kappa(r)\cos p,\ \kappa(r)\cos q,\ \kappa(r)\sin\psi) \tag{5}$$

と与えられる．さらに OP の xy 平面への射影と x 軸のなす角を φ とすると

$$\cos p = \cos\psi\cos\varphi, \quad \cos q = \cos\psi\sin\varphi \tag{6}$$

であるから p，q，ψ の代わりに φ，ψ を用いて，力の 3 成分を表すことができる．具体的に表すと

$$\begin{aligned}
f_x &= \kappa(r)\left(\delta u_x \cos^2\psi\cos^2\varphi + \delta u_y \cos^2\psi\sin\varphi\cos\varphi + \delta u_z \sin\psi\cos\psi\cos\varphi\right)\\
f_y &= \kappa(r)\left(\delta u_x \cos^2\psi\sin\varphi\cos\varphi + \delta u_y \cos^2\psi\sin^2\varphi + \delta u_z \sin\psi\cos\psi\sin\varphi\right)\\
f_z &= \kappa(r)\left(\delta u_x \sin\psi\cos\psi\cos\varphi + \delta u_y \sin\psi\cos\psi\sin\varphi + \delta u_z \sin^2\psi\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．$(f_x,\ f_y,\ f_z)$ は r，ψ，φ の関数になっていることに注意しよう．

ここでさらに，式 (2) より

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi \tag{8}$$

となることを考慮して，式 (1) を思い出すと δu_x, δu_y, δu_z も r，ψ，φ を用いて表すことができる．したがって，式 (7) は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}
f_x(r,\,\psi,\,\varphi) &= \kappa(r)\left\{rX_1(\psi,\,\varphi)+r^2X_2(\psi,\,\varphi)+\cdots\right\}\\
f_y(r,\,\psi,\,\varphi) &= \kappa(r)\left\{rY_1(\psi,\,\varphi)+r^2Y_2(\psi,\,\varphi)+\cdots\right\}\\
f_z(r,\,\psi,\,\varphi) &= \kappa(r)\left\{rZ_1(\psi,\,\varphi)+r^2Z_2(\psi,\,\varphi)+\cdots\right\}
\end{aligned} \tag{9}$$

ここでは $X_1(\psi,\,\varphi)$，$X_2(\psi,\,\varphi)$，$Y_1(\psi,\,\varphi)$，$Y_2(\psi,\,\varphi)$，$Z_1(\psi,\,\varphi)$，$Z_2(\psi,\,\varphi)$ の具体的な表現は省略するが，いずれも a，b，c，d を整数として，因子 $\sin^a\psi\cos^b\psi\sin^c\varphi\cos^d\varphi$ を含んでいる．

粒子 M からみて周囲に存在する他の粒子は等方的に分布しているものとすると，粒子 M がこれらの粒子から受ける力の総和 $(F_x,\,F_y,\,F_z)$ は

$$F_x=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\int_0^{\infty}r^2drf_x(r,\,\psi,\,\varphi)$$

などとなる．

積分計算を実行する準備ができた．まず ψ，φ による積分を調べると，三角関数の周期性から多くの項は消え去る．とくに $X_1(\psi,\,\varphi)$，$Y_1(\psi,\,\varphi)$，$Z_1(\psi,\,\varphi)$ に含まれる項はいずれも積分すると 0 になる．残るいくつかの項については

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{3\pi}{4},\quad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\pi,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\psi\cos^3\psi d\psi=\frac{4}{15},\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\psi d\psi=\frac{16}{15}$$

を使って計算を進めることができる．

最後に r による積分では

$$\int_0^{\infty}r^4\kappa(r)dr$$

の計算を必要とする．関数 $\kappa(r)$ を知ることはできないので具体的な計算はできないが，$\kappa(r)$ が r の増加とともに急速に 0 に近づくことから，積分は有限の値を持つであろうと考えられる．そこで ψ，φ による積分結果をふまえて

$$k_{\mathrm{N}}=\frac{2\pi}{15}\int_0^{\infty}r^4\kappa(r)dr$$

とおくことにしよう．すると力 $\boldsymbol{F}$ の 3 成分は

$$\begin{aligned}
F_x &= k_{\mathrm{N}}\left(3\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2u_z}{\partial z\partial x}\right)\\
F_y &= k_{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_y}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_z}{\partial y\partial z}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}\right)\\
F_z &= k_{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_x}{\partial z\partial x}+2\frac{\partial^2u_y}{\partial y\partial z}\right)
\end{aligned}$$

と表すことができることがわかる．

これをベクトル解析の記号を使って表現すると

$$\boldsymbol{F}=3k_{\mathrm{N}}\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u})-k_{\mathrm{N}}\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}) \tag{10}$$

となる[*1].

実際に式 (10) の x 成分を調べてみると

$$
\begin{aligned}
F_x = 3k_{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\
-k_{\mathrm{N}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right\} \\
= k_{\mathrm{N}}\left(3\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}\right)
\end{aligned}
$$

と確認される．

1 個の粒子の代わりに点 O を中心とする微小領域に含まれる粒子の集まり全体についてその密度を ρ とし，その変位を粒子 M の変位に等しいものとすると，その領域に含まれる微小要素に対する運動方程式は

$$
\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 3k_{\mathrm{N}}\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) - k_{\mathrm{N}}\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}) \tag{11}
$$

となる．

■コーシーの理論　ナヴィエの論文はフランスの学士院に提出されたものであるが，その学士院の会員であったコーシー (A. L. Cauchy, 1789 - 1857) は，ナヴィエのように粒子間に働く中心力を出発点とするのでなく，弾性体をはじめから連続体ととらえて分析した [1]．応力と歪みに注目して分析を進める内容は概ね現代の弾性体力学の導入部分に一致している．

その結果のみを記しておくと次のようになる

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\
\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\
\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{12}
$$

ここで応力テンソル P，歪みテンソル E の間に，定数 k，K を用いて

$$
P = kE + KvI, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}
$$

の関係が成り立つものとする．また v は体積歪み（微小部分の体積 δV の変化）で

$$
v = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}
$$

と与えられる．したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \rho\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}\right) \\
\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z}\right) \\
\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{k+2K}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{14}
$$

[*1] 原論文で使われている微分記号は，偏微分も含めてすべて記号 ∂ でなく，記号 d となっている．また，添え字が使われることもないので，これらに慣れた我々にとってきわめて見にくい．

となる．

これらの結果もベクトル解析の記号を使って表すと

$$\rho\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (k+K)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) - \frac{k}{2}\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}) \tag{15}$$

となる．

ナヴィエのモデルと比較すると係数が 1 つ増えているが，これはコーシーのモデルでは式 (13) で体積が変化する歪みを特別に扱っていることによる．コーシーの式 (15) において $k = 2K = 2k_\mathrm{N}$ とするとナヴィエが導いた式 (11) に一致する．

ここまでの議論は等方媒質が仮定されていたが，コーシーはさらに異方性をもつ結晶についてのモデルも考えた．新しいモデルではナヴィエと同様に粒子間の力にもとづく計算をおこなったが，その際，粒子の密度が方向に依存すると考えて異方性を扱った [2, 3].

■方程式の解　ナヴィエによる弾性体における運動方程式 (11) の解は，ポアソン (Siméon Denis Poisson, 1781-1840) によってただちに求められた [9].

ここでは見通しをよくするために，原著を離れてはじめからベクトル解析の記号を使うことにする．方程式に現れる変位 $\boldsymbol{u}$ を次のように 2 成分 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$ に分けよう．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{c} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{b} = 0 \tag{16}$$

これより $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$ はそれぞれ

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{b}}{\partial t^2} = 3k_\mathrm{N}\nabla^2\boldsymbol{b}, \quad \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{c}}{\partial t^2} = k_\mathrm{N}\nabla^2\boldsymbol{c} \tag{17}$$

を満たすことになる．

ここで $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(z, t)$ とすると条件 (16) は

$$\frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

方程式 (17) は

$$\rho\frac{\partial^2 c_x}{\partial t^2} = k_\mathrm{N}\frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2}, \quad \rho\frac{\partial^2 c_y}{\partial t^2} = k_\mathrm{N}\frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2}, \quad \rho\frac{\partial^2 c_z}{\partial t^2} = k_\mathrm{N}\frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \tag{19}$$

となる．式 (18) と (19) のここでは振動する解のみを考えることにするので第 3 式から $c_z = 0$ とおくことにする．c_x，c_y は式 (19) の第 1，2 式から得られる．具体的には変数 $\xi = z \pm V_c t$ の任意の 1 変数関数 $C_x(\xi)$，$C_y(\xi)$ が波動方程式 (19) を満たす．したがって

$$c_x = C_x(z \pm V_c t), \quad c_y = C_y(z \pm V_c t), \quad c_z = 0, \quad V_c = \sqrt{\frac{k_\mathrm{N}}{\rho}} \tag{20}$$

である．

また $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(z, t)$ とすると条件 (16) は

$$\frac{\partial b_y}{\partial z} = 0, \quad -\frac{\partial b_x}{\partial z} = 0 \tag{21}$$

となるから，$\boldsymbol{c}$ の場合と同様に方程式 (17) を用いて，今度は $b_x = 0$，$b_y = 0$ とすることができる．これに対して b_z は

$$\rho\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} = 3k_\mathrm{N}\frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2} \tag{22}$$

を満たさなければならない．この方程式の解も変数 $\xi = z \pm V_b t$ の任意の 1 変数関数 $B_z(\xi)$ を用いて表すことができる．すなわち

$$b_x = 0, \quad b_y = 0, \quad b_z = B_z(z \pm V_b t), \quad V_b = \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{N}}}{\rho}} \tag{23}$$

である．

式 (20)，(23) はいずれも z 方向に進行する平面波を表している．このうち $\boldsymbol{c}$ は xy 平面内での振動，$\boldsymbol{b}$ は z 方向の振動を示している．すなわち $\boldsymbol{c}$ は横波，$\boldsymbol{c}$ は縦波を表している．ナヴィエのモデルでは（コーシーのモデルでも）縦波は横波より進行速度が大きいことが示された．これは圧縮を伴う方向の力に対して弾性体は変位しにくく，圧縮を伴わない変形は比較的容易に生じるという経験と合致する．

■弾性波理論の展開　ナヴィエに始まり，コーシーによって磨きがかけれられた弾性波理論は一定の成果をあげた．しかしながら実験にもとづくフレネルの理論と完全な一致を見るには至らなかった．

ここで現れたのがグリーン (George Green, 1793-1841) である．1838 年にラグランジュによる解析力学の方法にしたがった光の弾性波理論を公表した [6]．コーシーのモデルでは粒子間の中心力が仮定されていたが，そうした制限を取り除いたモデルから出発したのであるが，それでもフレネルの反射・屈折の法則を十分に説明することができなかった．

ここに至っては常識的な弾性体のモデルを諦め，光学現象に合致するようなモデルを追求せざるを得なかった．それを実行したのがマッカラフ (James MacCullagh, 1809-1847) であった [7]．彼の理論で記述された内容は光を電磁波とみなして得られるものと一致していたが，マクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831-1879) の理論が登場するまでにはまだしばらくの時間を要した．

そもそも光を伝えるような弾性体であるエーテルが満たされた宇宙空間を惑星が自由に運動することができることが不思議である．これに関してストークス (Geroge Gabriel Stokes, 1819-1903) はエーテルを惑星運動のようなゆっくりとした運動に対しては柔らかく，光のように速い振動に対しては硬く振る舞うものと考えた [10]．

光の電磁説が認められた後も電磁場を担う媒体としてのエーテルは必要とされた．有名なマイケルソン・モーリーの実験ではエーテルに対する地球の軌道運動の検出の試みがなされたが，この試みは失敗に終わり，やがて特殊相対性理論へとつながっていくのである．

■まとめ　光学に関する個々の現象は 17 世紀あるいはそれ以前から知られていて，それなりに理解されていたが，これらの知見がひとつの理論体系としてまとめ上がられたのは 19 世紀のことである．諸現象を統合するために得られている知識と使える道具を総動員し，時に直感から離れて理論形式を拡張しながら研究が進められた．こうした過程で数理的解析が果たした役割は大きい．

特に弾性体理論の展開においては 17 世紀に確立したニュートン力学およびそれを受けて 18 世紀にオイラー (Leonhard Euler, 1707 ‐ 1783) やラグランジュ (Joseph Louis Lagrange, 1736 ‐ 1813) らによって進められた形式的整備と連続体への応用があったことを指摘しておきたい．

■謝辞　以上みてきたように 19 世紀前半の光学研究においてフランスの科学者たちによる数理的解析が極めて重要な役割を果たしていた．特にここにあげたフレネル，ナヴィエ，コーシー，ポワソンによるフランス語文献の講読にあたっては長岡亮介先生のご指導をいただいた．先生なくして本稿を書き上げることは到底できなかったであろう．改めて深く感謝を申し上げる次第である．

参考文献

[1] M. A. L. Cauchy. Sur les équations qui experiment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur. *Exercies de Mathématiques*, 3:160–187, 1828.

[2] M. A. L. Cauchy. Sur les équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. *Exercies de Mathématiques*, 3:188–212, 1828.

[3] M. A. L. Cauchy. Mémoire sur la théorie de la lumière. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 10:293, 1831.

[4] A. Fresnel. Premier mémoire Sur la Diffraction de la lumière, oú l'on examine particulièrement le phénomène des franges colorées que preésentent les ombres des corps éclairés par un point lumineux. 1815. Adressé à l'Académie des sciences, le 15 octobre 1815, in 'Œuvres complètes d'Augustin Fresnel, tome 1, pp. 9-33'.

[5] A. Fresnel. Note sur le calcul des teintes que la polarisation développe dans les lames cristallisées. *Annales de Chimie et de Physique*, 17:102–12,167–96,312–16, 1821.

[6] George Green. On the laws of the reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystalized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 7:1–24, 1838.

[7] J. MacCullagh. An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction. 21:17, 1845.

[8] C. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois d l'equilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 7:375 – 393, 1827. submitted in 1821.

[9] S. D. Poisson. Additions au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, inséré dans ce volume. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 8:623, 1829.

[10] G. G. Stokes. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*, 8:287 – 319, 1845.

[11] Thomas Young. Outlines of Experiments and Inquires respecting Sound and Light. *Phil. Trans.*, 90:106–150, 1800.

[12] Thomas Young. The Bakerian Lecture. On the Theory of Light and Colours. *Phil. Trans.*, 92:12–48, 1802.

[13] Thomas Young. The Bakerian Lecture. Experiments and Calculations relative to physical Optics. *Phil. Trans.*, 94:1–16, 1804.

第III部

論稿

どういう方程式なら解けるのか？
– Lagrange の分解式からわかる一例

松並 奏史

5 次以上の方程式には「解の公式」は存在しない。が，$x^5 - 1 = 0$ のように，5 次以上でも代数的に解くことのできる[1] 方程式は存在する。解ける方程式にはどのような特徴があるのだろうか。本論稿では，この疑問を Lagrange の分解式を足掛かりにして考え，代数的に解ける方程式として巡回方程式を取り上げる。さらに，3 次と 5 次の巡回方程式を Lagrange の分解式を直接的に用いた方法で実際に解くことを試みる。

1 Lagrange の分解式の性質

前々回（2021 年 2 月度），前回（2021 年 5 月度）の本研究会において，谷田部篤雄氏がまとめていたように，2 次から 4 次の方程式が代数的に解けることは，適当な《解の有理式》[2] を構成することで説明することができる。このような代数方程式へのアプローチは Lagrange に端を発するものである。ここでは，3 次方程式のいわゆる Cardano の解法に対応する場合を例に簡単にまとめておく。ここで，3 次方程式 $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ の解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ とおく。

1. 1 の（原始）3 乗根 ω を用いて

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3$$

という式を構成し，この式における $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ のあらゆる置換を考えると，次のようになる。

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \omega r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = \omega^2 r(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$r(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2) = \omega r(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = \omega^2 r(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$$

[1] ここで，方程式を「代数的に解く」とは，その解を，もとの方程式の係数の四則演算と n 乗根で表すことを指す。本論稿では，「方程式を解く」とは基本的にこの意味で用いることにする。

[2] 正確には，n 次方程式に対しては《解と 1 の原始 n 乗根の有理式》を構成するのであるが，表現の簡潔さを優先して本論稿ではこのように書く。

2. よって

$$
\begin{aligned}
&(X - r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))\,(X - r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1))\,(X - r(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2))\\
&\times (X - r(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2))\,(X - r(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1))\,(X - r(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)) = 0
\end{aligned}
$$

は X についての 6 次方程式であるが，上の性質により

$$X^6 + aX^3 + b = 0$$

という形になることがわかる。また，この方程式の構成方法から，係数 a, b が α_1, α_2, α_3 の対称式となるため，その基本対称式であるもとの方程式の係数 A, B, C を用いて表される。

この本質的には 2 次である方程式 $X^6 + aX^3 + b = 0$ を解くことで，$\sqrt[3]{R_1} := r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\sqrt[3]{R_2} := r(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2)$ の値を求めることができる。

3. 以上の議論と，もとの方程式についての解と係数の関係から，次の連立方程式が導かれる。

$$
\begin{cases}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -A\\
\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3 = \sqrt[3]{R_1}\\
\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3 = \sqrt[3]{R_2}
\end{cases}
$$

この連立方程式は解くことができ，実際に解くと，次のように解が得られる。

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tfrac{1}{3}(-A + \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2})\\
\alpha_2 &= \tfrac{1}{3}(-A + \omega^2\sqrt[3]{R_1} + \omega\sqrt[3]{R_2})\\
\alpha_3 &= \tfrac{1}{3}(-A + \omega\sqrt[3]{R_1} + \omega^2\sqrt[3]{R_2})
\end{aligned}
$$

以上の説明では，解の有理式 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ が，α_1, α_2, α_3 のあらゆる置換について，ω 倍を除いて実質的に 2 通りの値しか取らないことが決定的に重要である。そこでこうした《解の有理式》のことを，その端緒を開いた数学者 Lagrange に由来して《Lagrange の分解式》と呼び，また，この Lagrange の分解式を解とする方程式（上の説明における，本質的には 2 次である 6 次方程式）のことを《還元方程式》と呼ぶことがある。以下ではこれらの呼称を用いることにする。

私は，谷田部氏の議論 [3] などを追う中で，次のようなことを疑問に思った。

[3] 谷田部氏の論稿は，4 次方程式の場合の Lagrange の分解式として，Lagrange が提示したものよりも，2 次と 3 次の場合の自然な延長で得られるものを模索したものであった。

5次以上の場合に，一般の方程式については還元方程式がより複雑な高次の方程式になってしまうが，**常に**還元方程式が高次になるわけではないのではないか。すなわち，ある種の方程式については解ける還元方程式が得られるのではないか。そして，そのような方程式をLagrangeの分解式を用いて分析することはできないか。

調べると，GaussやAbelはじめ，このように考えた数学者はやはり数多く存在し，このアプローチがいわゆるGaussの《円分方程式の代数的可解性》や，Abelの《5次以上の一般の方程式の代数的解法の不可能性》へと繋がった [1]。

そうした既に広く知られた議論に包含されるものであるが，本論稿では，5次以上であっても代数的に解けることがこのLagrangeの分解式を通して理解しやすい**巡回方程式**を取り上げ，実際に3次と5次の巡回方程式をLagrangeの分解式を直接的に用いた方法で解くことを試みる。

2　巡回方程式

5次方程式 $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ を考えることにし，その解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ とおく。1の（原始）5乗根を ξ とし

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \alpha_1 + \xi\alpha_2 + \xi^2\alpha_3 + \xi^3\alpha_4 + \xi^4\alpha_5$$

と，3次の場合の自然な拡張で得られるLagrangeの分解式を考える。ただ，3次の場合と同様に考えると，一般にこの還元方程式の実質的な次数は $\frac{5!}{5} = 24$ 次となってしまう。そこで，この実質的な次数がより低いものになる場合として，**解の間に特定の相互関係がある**場合を考える。それは，何らかの有理関数 ψ が存在し

$$\psi(\alpha_1) = \alpha_2,\ \psi(\alpha_2) = \alpha_3,\ \psi(\alpha_3) = \alpha_4,\ \psi(\alpha_4) = \alpha_5,\ \psi(\alpha_5) = \alpha_1$$

が成り立つ場合である。このような方程式を**巡回方程式**という。

このとき，上のLagrangeの分解式は次のように表すことができる。

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \alpha_1 + \xi\psi(\alpha_1) + \xi^2\psi^2(\alpha_1) + \xi^3\psi^3(\alpha_1) + \xi^4\psi^4(\alpha_1)$$

これは α_1 にのみ依存する式であるから $\rho(\alpha_1)$ と書くとすると，各 n について $\psi(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$, $\psi(\alpha_5) = \alpha_1$ が成り立つことから

$$\rho(\alpha_2) = \xi^4\rho(\alpha_1),\ \rho(\alpha_3) = \xi^3\rho(\alpha_1),\ \rho(\alpha_4) = \xi^2\rho(\alpha_1),\ \rho(\alpha_5) = \xi\rho(\alpha_1)$$

となることがわかり，したがって

$$\frac{(\rho(\alpha_1))^5+(\rho(\alpha_2))^5+(\rho(\alpha_3))^5+(\rho(\alpha_4))^5+(\rho(\alpha_5))^5}{5} \;=\; (\rho(\alpha_1))^5$$

より，この左辺は $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5$ の対称式であるから右辺も対称式とわかる。よって，この値 R_1 は基本対称式である元の方程式の各係数を用いて求めることができ，その5乗根 $\sqrt[5]{R_1}$ の値が $\rho(\alpha_1)$, すなわち $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ の値となる。同様にして適当な Lagrange の分解式の値を求め，解と係数の関係と合わせて，次のような連立方程式を得ることができる。

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -A \\ \alpha_1 + \xi\alpha_2 + \xi^2\alpha_3 + \xi^3\alpha_4 + \xi^4\alpha_5 = \sqrt[5]{R_1} \\ \alpha_1 + \xi^2\alpha_2 + \xi^4\alpha_3 + \xi^6\alpha_4 + \xi^8\alpha_5 = \sqrt[5]{R_2} \\ \alpha_1 + \xi^3\alpha_2 + \xi^6\alpha_3 + \xi^9\alpha_4 + \xi^{12}\alpha_5 = \sqrt[5]{R_3} \\ \alpha_1 + \xi^4\alpha_2 + \xi^8\alpha_3 + \xi^{12}\alpha_4 + \xi^{16}\alpha_5 = \sqrt[5]{R_4} \end{cases}$$

$\xi^{n+5}=\xi^n$ であることと $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4=0$ であることを利用して，この連立方程式は解くことができる。実際に解くと，次のように解が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{5}(-A+\sqrt[5]{R_1}+\sqrt[5]{R_2}+\sqrt[5]{R_3}+\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^4\sqrt[5]{R_1}+\xi^3\sqrt[5]{R_2}+\xi^2\sqrt[5]{R_3}+\xi\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^3\sqrt[5]{R_1}+\xi\sqrt[5]{R_2}+\xi^4\sqrt[5]{R_3}+\xi^2\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_4 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^2\sqrt[5]{R_1}+\xi^4\sqrt[5]{R_2}+\xi\sqrt[5]{R_3}+\xi^3\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_5 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi\sqrt[5]{R_1}+\xi^2\sqrt[5]{R_2}+\xi^3\sqrt[5]{R_3}+\xi^4\sqrt[5]{R_4}) \end{aligned}$$

このように，巡回方程式は，その解の間の周期的な関係を規定する有理関数 ψ がわかっている場合には，その解の代数的表現を得ることができるのである。また，ここで取り上げたのは5次の巡回方程式であるが，同様にして，n 次の巡回方程式を解くことができることもわかる。

3 巡回方程式の解法一例

3.1 3次の巡回方程式

ここでは，まず比較的計算のしやすい3次の場合から考える。

$$x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}=0$$

この方程式は巡回方程式であり，3 つの解の周期的な関係を規定する関数 ψ は

$$\psi(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha$$

である[4]。

3 つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とおき，上の関数 ψ を用いて計算すると，次の連立方程式が得られる[5]。

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & -\frac{1}{2} \\ (\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3 & = & \frac{1}{8}(-21\omega - 7) \\ (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3)^3 & = & \frac{1}{8}(-21\omega^2 - 7) \end{cases}$$

したがって，次のように解が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{6}(-1 + \sqrt[3]{-21\omega - 7} + \sqrt[3]{-21\omega^2 - 7}) \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{6}(-1 + \omega^2\sqrt[3]{-21\omega - 7} + \omega\sqrt[3]{-21\omega^2 - 7}) \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{6}(-1 + \omega\sqrt[3]{-21\omega - 7} + \omega^2\sqrt[3]{-21\omega^2 - 7}) \end{aligned}$$

3.2 5 次の巡回方程式

次に 5 次の場合である。

$$x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{32} = 0$$

この方程式は巡回方程式であり，5 つの解の周期的な関係を規定する関数 ψ は

$$\psi(\alpha) = 16\alpha^5 - 20\alpha^3 + 5\alpha$$

---

[4] この方程式の 3 つの解は $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ で，ψ はいわゆる 3 倍角の公式

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

から得られる関数である。

[5] 実際の計算手順は以下の通りである。

1. $(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3$ を展開して $a\omega + b\omega^2 + c$ の形に整理する。
2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ で表された係数 a, b, c を，$\alpha_2 = \psi(\alpha_1), \alpha_3 = \psi^2(\alpha_1)$ であることを利用して，α_1 のみの式で表す。
3. α_1 のみの式として表された係数 a, b, c を，多項式 $\alpha_1^3 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{8}$ で割ると，その余りとして定数が得られる。この定数が実際の a, b, c の値である。

以上の計算のほとんどは, 本末転倒な気もするが, Wolfram Alpha でおこなった。ここで, Wolfram Alpha とは無料で Web 公開されている「計算知能 Computational Intelligence」である。

である[6]。

5 つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ とし，上の関数 ψ を用いて計算すると，次の連立方程式が得られる[7]。

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 &= -\frac{1}{2} \\ (\alpha_1+\xi\alpha_2+\xi^2\alpha_3+\xi^3\alpha_4+\xi^4\alpha_5)^5 &= \frac{1}{32}(-196+90\xi-20\xi^2+255\xi^3-130\xi^4) \\ (\alpha_1+\xi^2\alpha_2+\xi^4\alpha_3+\xi\alpha_4+\xi^3\alpha_5)^5 &= \frac{1}{32}(-196+255\xi+90\xi^2-130\xi^3-20\xi^4) \\ (\alpha_1+\xi^3\alpha_2+\xi\alpha_3+\xi^4\alpha_4+\xi^2\alpha_5)^5 &= \frac{1}{32}(-196-20\xi-130\xi^2+90\xi^3+255\xi^4) \\ (\alpha_1+\xi^4\alpha_2+\xi^3\alpha_3+\xi^2\alpha_4+\xi\alpha_5)^5 &= \frac{1}{32}(-196-130\xi+255\xi^2-20\xi^3+90\xi^4) \end{cases}$$

したがって，これらの式の右辺の値を上から順に $-A, R_1, R_2, R_3, R_4$ とすることで，解は次のように表される。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{5}(-A+\sqrt[5]{R_1}+\sqrt[5]{R_2}+\sqrt[5]{R_3}+\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^4\sqrt[5]{R_1}+\xi^3\sqrt[5]{R_2}+\xi^2\sqrt[5]{R_3}+\xi\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^3\sqrt[5]{R_1}+\xi\sqrt[5]{R_2}+\xi^4\sqrt[5]{R_3}+\xi^2\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_4 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi^2\sqrt[5]{R_1}+\xi^4\sqrt[5]{R_2}+\xi\sqrt[5]{R_3}+\xi^3\sqrt[5]{R_4}) \\ \alpha_5 &= \tfrac{1}{5}(-A+\xi\sqrt[5]{R_1}+\xi^2\sqrt[5]{R_2}+\xi^3\sqrt[5]{R_3}+\xi^4\sqrt[5]{R_4}) \end{aligned}$$

[6] この方程式の 5 つの解は $\cos\frac{2\pi}{11}, \cos\frac{4\pi}{11}, \cos\frac{6\pi}{11}, \cos\frac{8\pi}{11}, \cos\frac{10\pi}{11}$ で，ψ は 5 倍角の公式

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

から得られる関数である。

[7] 3 次の場合と同様の計算手順で求められたが，単純にはうまくいかなかった。というのも，$(\alpha_1+\xi\alpha_2+\xi^2\alpha_3+\xi^3\alpha_4+\xi^4\alpha_5)^5$ を展開して整理し，その各係数を ψ を用いて α_1 のみの式で表す際，機械的に代入していくだけだと項数があまりに増えてしまい，Wolfram Alpha で処理できる最大文字数が超えてしまうのだ。なにせ $(\alpha_1+\xi\alpha_2+\xi^2\alpha_3+\xi^3\alpha_4+\xi^4\alpha_5)^5$ を展開した際の項の数だけでも ${}_5\mathrm{H}_5 = {}_9\mathrm{C}_5 = 126$ 個もあるうえに，α_5 は α_1 についての $5^4 = 625$ 次式になる。

そこで，$\psi(\alpha_1), \psi^2(\alpha_1), \psi^3(\alpha_1), \psi^4(\alpha_1)$ **を** α_1 **の式として表す段階から，多項式** $\alpha_1^5+\frac{1}{2}\alpha_1^4-\alpha_1^3-\frac{3}{8}\alpha_1^2+\frac{3}{16}\alpha_1+\frac{1}{32}$ **で割った余りに関する操作，すなわち** $\mathbb{Q}[x]/(x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x+\frac{1}{32})$ **上での処理**とすることで，無事計算できた。この方法であれば，高々 4 次式を 5 次式に代入することになるため，高々 20 次式しか扱わなくてよい。

また，この計算の最初のステップである，$(\alpha_1+\xi\alpha_2+\xi^2\alpha_3+\xi^3\alpha_4+\xi^4\alpha_5)^5$ を展開した際の 126 個の項を，$1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ の各係数に分類する部分は，手作業でおこない，意外に大変であった。それゆえ最終的に割り算の余りとして定数が得られたときは心底ほっとした。

参考文献

[1] 高瀬正仁,『アーベル（前編）不可能の証明へ』（双書 11・大数学者の数学）, 現代数学社, (2014)

[2] 倉田令二朗,『ガウス円分方程式論』（河合ブックレット 数学シリーズ 6）, 河合文化教育研究所, (1988)

松並奏史氏の論考についての査読委員会報告

松並論文査読委員会委員長
長岡　亮介

松並奏史氏から『数理教育のロゴスとプラクシス』2021年8月号の査読〆切に間に合う形で表記論考の提出を受けて、機関誌委員長の指名により、私が査読委員会のまとめ役を仰せつかり、一般会員三名、その他一名、委員長をいれて過半数の票決が可能な五名からなる査読委員会を組織して査読をお願いし、いただいた全意見を踏まえて、査読委員会委員長としての責任で

「査読論文として掲載可」

という結論を得たので、この結論とその根拠を簡単に報告するものである。

研究機関誌である以上、TECUMの投稿規程にある数理教育を視野の中心に据えた「独創性」、「新規性」、「実践的な意味」の少なくとも一つが第一に問われるは当然であり、また、学術性を謡う論考集である以上、主張の「緻密性」、「論理性」、「歴史的位置付け」など、論文としての基本のすべてが総合的に評価されることも自明である。松並論文は、「査読済み研究論文」としての上述の基本基準をクリアしているだけでなく付加的な利点が認められたことが査読結果である。

ただし、純粋に数学的な論文と違い、《数理教育特有の巨大な問題》を精密かつ包括的に論ずるには、研究会の講演録を兼ね、印刷経費の爆発を押えるべき『数理教育のロゴスとプラクシス』は、残念ながら「スペースが狭すぎる」も事実である。実際、一般会員でない査読者からは、この限界を考慮しない意見もいただいた。それは学理的には極めて自然で、かつありがたいことであるので、この場を借りて、『数理教育のロゴスとプラクシス』が「研究機関誌」を謡いながらも「査読済み研究論文」としての基本基準以外の欠点、言い換えれば学術論文としての不完全さを許容した上での結論であることを断っておきたい。これは、査読委員から指摘された多くの教育的・数学的諸点について、論文の著者が、それを吸収し、内的に昇華／結晶化する知的な努力を今後も継続し、より一層良いものができることを期待・確信しての教育的結論でもあり、これは数理教育に関する論文の査読の前例として踏襲されて良いものであると、恩師藤田宏先生（東京大学名誉教授、TECUM執行名誉会員）を通じて数理教育の抱える諸問題を考える際に不可欠な長期的視野の大切さを学んだ私自身は考えている。

査読委員からの報告は、三名が「無条件掲載可」、一名が「条件付掲載可」であったが、最終稿は、この条件をクリアしているので、4名全員が掲載可の結論となったということになる。

以上は、査読委員会の報告の形式的な部分である。以下に、意見を公表できない匿名の査読委員会メンバーを代表して、委員各位の貢献に感謝するとともに、主要な論点をここでは委員長権限で勝手に抽象化・単純化・匿名化し、査読委員会の実質的な査読報告として追記する。以下に箇条書された個々の記述が各委員の

報告に対応する分けでないことはいうまでもない。そしてこれらの内で最終稿に反映できるものは反映されている。

- 想定する読者層の中心が数学教育関係者であるのであるから、その方々の現代的な抽象代数学に関する知識に対する配慮がもっとあっても良いのではないだろうか。例えば「代数的可解性」「巡回方程式」など、その分野の人には常識であっても、そうでない人にも分かるような最小限の配慮 — 例えば定義に触れるとかその数学的な意味を示唆するとかだけでも良い — が『数理教育のロゴスとプラクシス』という数学教育の規範的な論考集の査読論文としては、もっともっと望まれるところである。“Wolfram Alpha ” のようなコンピュータ・ソフトウエアの業界用語の使用にも慎重であるべきである。

- 「5 次以上の代数方程式は代数的な解法、いわば解の公式が存在しない」ことばかりが流通している学校教育の現状において、巡回方程式という特別な方程式であれば, 5 次以上の方程式でも代数的に解けることを示唆する点で論考は新鮮であり、しかもその実直な議論の運びから、抽象代数の知識を持たない数学教員や学生にとっても、方程式論の本質的な部分を理解するための重要な貢献であると評価できる。一方、p 次既約多項式は巡回多項式であるか否か, 巡回多項式の定義に出てくる有理関数 ϕ は一意的であるか否か, 巡回多項式の根は三角関数で表現可能であるか否か, 等々、すでに一部は大学入試でも話題となっている問題であるからその紹介があっても良かったのではないか。そもそも、この論考でも、これらの問題の一部は触れられているのであるからなお一層である。

- 一般的な代数方程式の代数的可解性の問題は長く研究されて来ているので、可解な代数方程式のガロア群による特徴付けや、5 次方程式の代数的可解性の判別式による判定条件など、いわゆる先行研究への言及が一言あると、より良かったのではないか。しかし、一般には非可解な 5 次以上の方程式についての、いわば不完全な「解の公式」といった問題はこれまであまり研究されて来なかった話題であるので、約二世紀前に「決着がついた」と思われている古典的な主題についての本論考は現代にあってすら新鮮であると評価したい。

- 平凡そうに見える主題に対して、斬新なアプローチを試みたもので、数学的内容それ自身に関しては必ずしも独創的ではないが、アプローチとその具体的な教育的論述に数理教育としての新鮮さがあることを大いに認めるべきであると思う。高校数学では検定教科書の中には、解の公式からの極めて平凡な計算例のように卑俗化して教育されている「解と係数の関係」がもっている数学的な意味を啓発する上でも重要な貢献となるであろう。

- 方程式の「代数的な可解性」といわゆる「解の公式」との間にある微妙な違いについて話題とすること自身が、「数学史の常識」という奇妙な権威に支

配されがちな数学教育において大きな意味があると思う。現代数学が学校数学ともっているはずの見えない関係を想起させてくれる論考である。

等々である。

以上

第IV部

Q and A

「微分係数」って，一体何の「係数」なんでしょうか。

TECUM 一般会員 H 氏による回答

正直に申し上げると、私自身も高校生の頃、同じ疑問をもっておりました。高校生の頃の私のとりあえずの「de la fonction 解決」は、関数 $f(x)$ の $x = a$ における「微分係数」は、曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における「**接線の傾き**」を表す値であるので、その接線を表す 1 次関数 $f'(a)(x-a) + f(a)$ の主要項である 1 次項の**係数**である、というものでした。こんなもので自分をなんとなく納得させておりましたのは恥ずかしいことです。腑に落ちるような納得ではなかったからです。

私自身の大学院での経験になりますが、J.L. Lagrange の Théorie des fonctions analytiques （直訳すれば『解析的関数の理論』）, 1797 を読んではじめて真の由来に気づいたように思いました。少し偉そうで恐縮ですが、用語を巡る問題は、歴史的なアプローチ以外に論理的に迫ることができないので、ちょっとその話をさせてください。(歴史的なアプローチといっても、二十世紀に入ると、最近私が日大の山浦義彦先生の関数解析のゼミで萬砂篤氏から聞いた話題に登場する *mollifier* をはじめ、数学的に重要な概念に名称をつけるのに、発見者の勝手な思い付き（着想、思い入れ）を恣意的に入れた造語が少なくないので歴史的なアプローチといっても単なる逸話になってしまうことも少なくないのですが。)

今日では、関数 $f(x))$ のべき級数展開と呼ばれる

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots (*)$$

に対して、最初の定数 a_0 は $f(0)$ に他ならず、次の係数 a_1 が $f'(0)$ であり、その次の係数 a_2 が $\frac{1}{2}f''(0)$ であり、以下同様にして、係数 a_n が $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ である、という具合に、「無限小」のような怪しい概念に訴えることなく、$f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ が《純粋に解析的（当時の意味では、代数的と同じ意味の形容詞でした！）な方法》で、関数の微分が定義できるという、いかにも Lagrange らしい《天才的な思い込み》にありました。$f'(0)$ でなく、一般の $x = a$ における微分係数を考えるには $(*)$ の代わりに

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-a)^n + \cdots\cdots$$

を考えるだけです。これだけで、日本の高校数学 II, III の微分法はほぼ完全に cover できるのが素晴らしいことです。

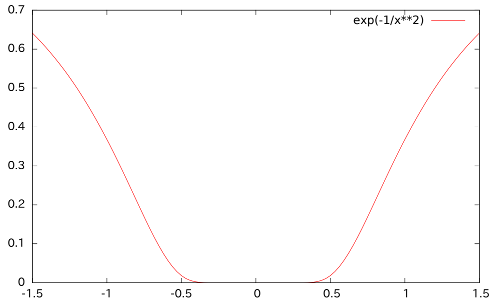
これに対して、A.L.Cauchy が、何回でも微分可能であっても、そのような級数に展開できない（両辺の相等性が成り立たない）関数の具体例を提示して、Lagrange の野心的なアイデアが数学的に成立しないことを突き付けたのでした。

今では、数学の実に多くの場面に登場する

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ のとき} \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{その他のとき} \end{cases}$$

という関数です。

この関数のグラフは、右の図のように、原点であまりにも良く x 軸に接します。「原点であまりにも良く x 軸に接する」とは、単に $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0$ であるのみならず、$\phi''(0) = 0, \phi'''(0) = \cdots = \phi^{(n))}(0) = \cdots = 0$ である、ということです。$\phi(x)$ は「無限回微分可能」で $x = 0$ における何階の「微分係数」も 0 なのです。しかし、言うまでもなく、$x \neq 0$ では $\phi(x) > 0$ は自明です。

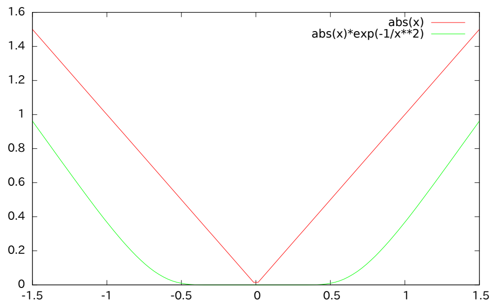


この関数 $\phi(x)$ の強烈な個性を理解するためにちょっとした例を紹介しましょう。本当は、もっと本格的な応用が大学の数学にはいっぱいあるのですが、高校数学の範囲で理解可能な例です。

微分不可能な関数として、高校数学に良く（やたらに、と言いたいくらいです！）登場するのは、

$$g(x) = |x|$$

という関数です。このように、$x = 0$ で微分不可能な関数であっても、上の $\phi(x)$ をかけてやった関数 $G(x) = \phi(x)g(x)$ を考えるともはや $g(x)$ の微分不能性のような《些細な特異性》は $\phi(x)$ の圧倒的な滑らかさのために押し潰されて解消されててしうことです。それを直観的に納得してもらうために右に $y = |x|$ と $y = |x|\phi(x)$ を重ねて描きましょう。



こうすると、元々あった関数 $g(x)$ の原点での例外的な振る舞い（特異性）が $G(x)$ ではまるで完全に解消されてしまっているのを感じませんか。そして $G(x)$ を（$x = 0$ を除いて）$\phi(x)$ で割ってやれば、元の関数 $g(x)$ が（$x = 0$ を除いて）復元できます。ということは $g(x)$ の原点での微分不能性など、とるに足りないとすら言えると思いませんか。であるとすればそんな些細なことを針小棒大に強調するのは数学としては少し筋が悪いように感じてしまいます。

「微分係数」という語の由来から脱線してしまいましたが、この現代的には、意味が不明瞭な用語を、極めて限られた高校数学の時間の中で扱う必要は数学的にはないのではないか、私達は、次世代のために、教室で取り上げる言葉や知識の厳選の責任をつねに迫られている、という私の問題提起の根拠を「証明」するために敢えてつけました。

微分を正当化するために使いはじめられた級数展開という手法の汎用性・普遍性を論破したたった一つの関数が、私達の常識を超える強烈な個性をもっており、それが微積分法の従来の常識を打ち破り、微積分学を大きく前進する上で重要な役割を果たすようになった、というのは、まさに《歴史の皮肉》 — 私の言葉では《歴史の弁証法》 — の一例だと思います。

おそらく、高校現場では、哲学者 Kant を真似て言えば《認識論的権利問題》から、導関数 $f'(x)$ を定義す

るために、その値を先に定義しておく必要がある、のように、「微分係数の概念の教育的意義」を語るのでしょうが、それが通じる高校生、現場教員がどれほどいるのでしょうか。

検定教科書にありがちな近現代の数学と言う「虎の威を借りた狐」の矮小な浅知恵のようではないでしょうか。私自身は微分係数の記号 $f'(a)$ に導関数の記号 $f'(x)$ を先取りをしているという《教育的な思い遣り》という名の嘘、さらに近年の風潮に合わせて言い換えれば、《無自覚の論理的な詐欺》を感じます。

この問題の解答について質問があります。

問題.　次の不等式を解け。

$$2^{2x+1} - 5 \times 2^x + 2 > 0$$

解答.

与えられた不等式は

$$2 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 2 > 0$$

と変形できる。ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり

$$2t^2 - 5t + 2 > 0$$
$$(2t - 1)(t - 2) > 0$$

よって，$t > 0$ であるから

$$0 < t < \frac{1}{2},\ 2 < t$$

ゆえに　$0 < 2^x < 2^{-1},\ 2^1 < 2^x$

したがって，底 2 が 1 より大きいから　$x < -1,\ 1 < x$

最後の変形で，「$0 <$」の部分が無くなっています。一体どこにいってしまったのでしょう？
結局これを考えなくてよいのであれば，そもそも「$t > 0$」ということをいちいち断らなくてもいいのではないでしょうか？

一般会員 I 氏による回答

ご質問の最後の「そもそも」という表現が私は好きです。問題を根源的に考えようとする姿勢を示唆するからです。

そして、この「そもそも」という表現を使わせていただけば、そもそも、上の「解答」は冒頭の「ここで，$2^x = t$ とおくと，」という部分からして《数学的にも教育的にも間違っている》、これがきつすぎる表現なら《余計な親切で自分で混乱を引き起こしている》ということです。

実際、この部分を省いて答案を構成すると

解答.

与えられた不等式は

$$2 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0$$
$$\text{よって}\ (2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) > 0$$

と変形できる。よって　$2^x < \frac{1}{2}$，または $2 < 2^x$

すなわち　$2^x < 2^{-1}$，または $2^1 < 2^x$

底が 1 より大きい指数関数 2^x は単調増加であるから

$$x < -1,\ \text{または}\ 1 < x$$

というだけはないでしょうか。

「墓穴を掘る」とか、「土壺(どつぼ)にはまる」という表現がありますが、上の「解答」はその典型だと思います。余計なことはたくさん書いているのに本当に大切なことが抜けていることがその典型であることの証明です。

このようにいうと、標準的な教育スタイルを過激に断罪しているように見えるでしょうが、老婆心ながら付け加えると、上の指摘は、「$2^x = t$ とおく」ことそのものの意義を否定しているのでは決してありません。むしろ、この問題の急所は、要するに、$2^{2x+1} - 5 \times 2^x + 2 > 0$ という数学的にどんな意味があるかどうか分からない奇妙な形の不等式が、2^x についての平凡な 2 次不等式に過ぎないこと、より詳しく言い換えると、標準的な指数関数 $f(x) = 2^x$ と平凡な 2 次関数 $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$ の合成関数 $g(f(x))$ についての不等式 $g(f(x)) > 0$ という「教育用の問題のための典型的問題」の、上のような理解に基づく解答が求められているという点にあると思うのですが、この本質的な理解を欠落して、「生徒に分かりやすく」「減点されない模範解答」の指導に走ると、上のような数学的な意味が不透明な、したがって、分かる生徒の成長を阻害し、分からない生徒をより分からなくするような空疎な「数学の基本問題の解法指導」に走りがちであることに警鐘を鳴らしたいのです。

そのバカバカしさに気づいた質問者は、良い意味での批判的思考力をお持ちだと思います。

数列では，等差数列，等比数列をまず基本として学び，それらの「数列の和」や，「階差数列」を学びました。等差数列と等比数列という加法と乗法について対等な 2 つの数列を学ぶのに，なぜそれ以降はどれも加法的である「数列の和」や「階差数列」しか取り上げられないのですか？
「数列の積」や $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ のような，いわば「階比数列」を考えるのも自然な気がするのですが $\cdots$。

一般会員 J 氏による回答

おっしゃる通り、加法と乗法に対して《対等に》対峙できるのは、近世以降の数学の大きな特質の一つですが、それはあくまで、加法に関する実数全体 $(\mathbb{R},+)$ と乗法に関する正の実数全体 $(\mathbb{R}^*,\times)$ との間の話であり、素数をはじめ、整数論に関する議論の難しさは、加法的に生成された整数全体がその自然な結果として加法的には行儀が良い well-behaved ものの、乗法的な構造を併せ持ち、出生の原理である加法とそれから飛躍して考えられた乗法の間に架かるべき自明なブリッジが存在していないことです。それは素数の分布を例に引けば明らかでしょう。

もちろん $(\mathbb{R},+)$ と $(\mathbb{R}^*,\times)$ の同型性は基本中の基本であり、これを一切外した講義は高校生以上では（ときには中学生に対しても）あり得ないと思います。加法の計算規則

$$ma + na = (m+n)a$$

が「分配法則」として教えられ、乗法の計算規則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

が「指数法則」として教えられるのは、「あり得ない」ことが実際に起きていることの証明です。

高校数学の「数列」単元には、数え切れないほどたくさんの構造的矛盾がありますが、御指摘の問題はその一つであると思います。

なお、《階差数列と数列の部分和の関係》は、もしも、の話ですが、正しく教育されれば、《微分と積分の関係の有限版》として極めて重要なものです。

また、部分和という加法的概念に対応して、部分乗積 $\Pi_{k=1}^{n} a_k$ という乗法的概念もありますが、等差数列の部分和に対応しては、等比数列なら、等比数列の部分乗積を考えるのが自然であり、反対に、乗法的な等比数列で加法的な部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ を考えるのは、加法的な等差数列で乗法的な部分乗積 $P_n = \Pi_{k=1}^{n}(a + d(k-1))$ を考えるのに似た不自然さがあるのですが、等比数列の部分和は、位取り記数法による無限小数表現や、関数のべき級数展開という近代数学の偉大な発見に繋がる重要な道であるので特別の配慮が必要であると思います。

独断的な数学原理主義や個人的感傷で数学教育を語ってはならないとは思うものの、《それでもやっぱり》という本音を語らせていただけるなら、特に無限級数は若い世代には、是非ともしっかりと勉強して大いに感動して欲しいと私が思う数学素材の一つです。

もちろん、そのためには、$a^2 - b^2, a^3 - b^3$ のような初歩的な因数分解の段階から、将来の無理を意識した指導が求められていると考えています。ここに等比数列の部分和の基本原理があるからです。

http://www.tecum.world/

TECUM Logos and Praxis Series
Published by TECUM © on Aug. 9th, 2021