

# 目次

第 0 章	はしがきに代えて	5
0.1	Workshop という企画への願い	5
0.2	資料: 理事会資料から — 一部変更しています	8
0.2.1	Workshop の、研究会との構造的違い	8
0.2.2	具体的な Workshop 組織に向けて	9
0.3	実際に動かしてみると、	12
第 1 章	1 次方程式を巡って — 本当の基礎の大切さ	15
1.1	はじめに	15
1.2	多くの人にとっての方程式との出会い	15
1.3	1 次方程式の中学でのその後の発展	19
1.4	1 次方程式の高校での発展	20
1.5	1 次方程式の忘れ去られた発展	22
第 2 章	医師の臨床的判断決定における論理的思考と 10 代で受ける数学教育との関係の一考察	25
2.1	問題提起	25
2.2	論理的でない診断の過程の一例	25
2.3	作業問題	27
第 3 章	解析幾何の入門部分を巡って	29
3.1	はじめに	29
3.2	検定教科書における「図形と方程式」単元の冒頭の実態	29
3.3	このように知識が細切れに詰め込まれる現状を克服するには	30
3.4	検定教科書の再構成は可能でしょうか?	32
3.5	伝統的な教育の限界を踏襲することは正しいか?	34
3.6	最後に、これだけはしっかりと理解して帰りましょう!	34
第 4 章	解析幾何における円を巡って	37
4.1	はじめに	37
4.2	そもそも円とは	37
4.3	距離について	38
4.4	内包から外延へ — 座標平面という抜群のアイデア!	39
4.5	いよいよ円の方程式	40
4.6	しかし、そもそもなんのための円の方程式なのでしょう?	41

4.7	演習問題の話題としての円 . . . . .	41
<b>第5章</b>	<b>数列の教育について必要な数理と覚悟</b>	<b>43</b>
5.1	問題提起 — 前書きに代えて . . . . .	43
5.2	伝統的な教育法のもつ諸問題 . . . . .	43
5.3	「等差数列:等比数列:いろいろな数列」という伝統的なスキームのもつ諸問題	50
5.4	漸化式について . . . . .	51
5.4.1	漸化式についての根本的な誤解 . . . . .	51
5.4.2	漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 教育の深刻な諸問題 . . . . .	52
5.4.3	漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 教育の深刻な諸問題 . . . . .	53
5.4.4	「その他の漸化式」という意味の不明な数学用語 . . . . .	54
5.5	数学的帰納法を教えることの「罪と罰」 . . . . .	55
5.5.1	そもそも「数学的」という修飾のない《帰納法》を教えているか]	55
5.5.2	帰納法 induction とは何か . . . . .	55
5.5.3	数学的帰納法の本当の威力を数学教育の中で体験させることが出来ているか	56
5.6	才能に恵まれた／恵まれない子どもに対する数列教育の一例 . . . . .	57
5.6.1	「数列を勉強する意味のある問題」に接する機会を作りたい。	57
5.6.2	教科書や問題集の中にある数列の発展的な意味 . . . . .	59
5.6.3	教科書や問題集の中にある数列の無意味な問題 . . . . .	59

## 第0章 はしがきに代えて

### 0.1 Workshop という企画への願い

私が、これまで、繰り返し、いろいろと書き散らしてきたことですが、今日の数学教育の閉塞した現状を打開するためには、

- 数学教育の現状そのものの、《緻密な観察》に基づく《精密な把握》
- 数学教育の現状をもたらしている要因の《鮮烈な分析》と《厳密な立証》
- 現状の数学教育の内容を《少し高い立場から眺めて》はじめて気づく《新鮮な数学的風景》を愛でる《知的な余裕》
- 従来、わが国では教材化されていない数学的テーマの、《多様な面白さ》を引き出す《演出的工夫》

といった作業と研究が必須であり、そのような志向性を明確に共有する様々な知見が提供され、相互に刺激し続けるような《緊張した相互的な力の場》の創出と維持が、より豊かな数学教育の実現のために不可欠であると、考えてきました。地味に見える作業と研究（勉強といっても同じ！）を蓄積的に継続することの重要性は、いまでも強調したいとつねに思っています。とりわけ「誰もが知っている学校数学」を対象とする研究では、ともすれば、陳腐、凡庸、自明の土壺にはまりかねない危険に隣り合いながら、しかしつねに創造性、斬新性を大切にして、しかも改革へと繋がる努力を継続することはとても大切だと思います。

しかし、最近、重要な視点がこれでは欠けていたことに気づきました。それは、「一回こっきりの青春」を生きる若者に寄り添って時空を共有する現場の教員にとっては、いつ活かされるか見えにくい学理的に奥行きのある議論よりも、《明日からの授業が変わる》ような実践的で即効性のある現状打開に役立つ具体策の提示が求められているのではないか、ということです。

そのように思ったのは、医師の研究会や学会が、先端的な医学の知見を交換する学理的な会合において、そのような学会としての本質的な部分以上に、現場での医療行為に対する指針（医療の世界ではしばしばガイドラインといいます）あるいは、指針の正しい読み方（ときには間違った読み方）のような、現場ですぐに役立つような情報を、先端的な知見に基づいて伝達する活動を重視し、それを「luncheon seminar」とか「教育講演」と呼んでつねに

大切にしていることをいろいろな折々に知ったからです。「xxx 学会認定医」などもそのような講演会に出席し、場合によっては、そこでのテストなどを受けたという記録の数や点数で認定されるようです<sup>1</sup>。確かに、医学部を卒業し、その後数年間の研修医生活を修了したというだけでは、薬や検査をはじめ、日進月歩する医療技術の情報からひどく遅れてしまうでしょう。最新の医療の最前線を切り開く人でないとしても、現代の医療に責任をもつ医師は、深い狭い専門性以上に、積極的に重要な最新情報に接する緊張感と柔軟な感受性が求められる仕事に違いないと思います。

学校の教員も、大学や大学院を出たときに習得した知識だけで日々新しく生まれて来る子どもたちに現代を生きるため必要な知識と知恵を鍛えることは出来ません。生命科学（生物）分野では特にこの傾向がはっきりと見えますが、物理のように学校範囲では、現代物理の最前線とは関係が薄く見える分野でも、日々の科学ニュースに曝されている生徒からの質問に答えなければならない教員は、学生時代には言葉も知らなかった概念や理論についての知識を吸収するための勉強が不可欠でしょう。永遠に代わることがないであろうと思われる体育や保健ですら、現代科学の知見で指導原則は、不断に変化しています。例えば、私の世代の人であれば、夏、水を飲むと発汗で体力を消耗するので水分摂取をすべきでないとか、火傷をしたときは、傷口と空気の接触を避けるためにすぐに油を塗る習ったものでした。ヨードチンキが、感染を防ぐのに決定的に重要であることと強く説得され、泣きながらつけた記憶はいまも鮮明です。

数学は、このような点では、実に例外的な科目といえましょう。小学校の数学は19世紀フランス革命の思想の影響下で創設される単位系の話など一部の例外を除いては中世以前の人々の数学的知識の一部にすぎませんし、中学校、高等学校まで進んでも、わずかな例外を除いては16世紀、17世紀に花開いた近代数学のにも関わらず、そんなに古い時代の黴臭いはずの数学的知識が、若い生命力を失わず、むしろ反対に現代の文明を支える強力な基盤となっていることです。そして、たまにジャーナリズムに登場する現代数学の話題は、高級すぎて、ジャーナリスト自身も分かっていないことが素人にもバレてしまうほどですから、いかに好奇心旺盛の子どもを抱えた先生でも、18世紀以降の数学の知識が日々求められると感ずることはあまりないでしょうし、まして、21世紀に展開している現代に数学の最先端の話題について生徒から真剣な相談を受けることもないと思います。それどころ

---

<sup>1</sup>これが次第にもっと USA 的に openness, fairness, そして accountability を要求されるように変化する流れができつつあるようで、お医者さんたちの中には、これでパニック状況になっていらっしゃる方もいるようです。「イイカゲン」な資格認定をビジネスにされるのは困った風潮ですが、このような認定作業の運用には「良い加減」という叡知が重要であることは分野を問いません。競争的資金で、教育研究の刷新努力を鼓舞するという名目の「研究費の重点投資」が、わが子の裏口入学を実現するという浅ましきは、論外であると信じたいところですが、調達システムの合理性をチェックする仕事の発注を巡る汚職話を耳にすると、「官」が回る予算が大きいほど、この手の不正が蔓延することは論理的には自明でありましょう。絶対的に公平な実力の判定など出来るはずがない、という理想は理想として、他方、現実には現実として、両者を混同しないで受け入れる懐の深さが大事だと思います。

か、最近の学校数学は、学校数学として閉じた世界を形成し、大学初年級の知識に発展することすら、一部の、ときに無責任な大学入試を除いてはないと断言できるくらいです。

その結果、数学教員の中に、数学教員としては、生徒以上に深い数学の知識を有する必要を感じないという人が登場して来ています。「自分が知っていることを相手に教える」という知識の伝達だけが任務であると思ってしまう、ということです。まるで、漢字の読み書きを正しく教えることだけが使命である、と考えている国語教員が存在すれば、寺子屋の時代ではあるまいに、と呆れられるはずですが、そのような時代錯誤が生き残っているのは、学校数学を、完成された知識として歴史の発展とか変化から取り残されたものと見なされているからでしょう。その結果として、学校数学の内容については、教員は、自分達が学校に在籍していたときに獲得した「数学の知識」を子どもたちに数学を「伝授」することが教育だと思ひ込んでしまいます。

確かに、大学で、少々現代数学を勉強したからといって、学校数学の核心を、中学生や高校生より、深く広く分かっているか？と聞かれると、困ってしまう、という誠実な先生は少なくないと思います。それは、大学で、数学を学ぶ、あるいは大学院で研究論文を書いたという経験をしている方であっても、普通の大学の数学科では、学校数学を深く理解するためのプログラムは組まれていないからです。「自分が高校までに習ったこと以外は教えられない」という先生方の正直すぎる告白は、この現状を証明するものです。

そもそも、戦後にできた多くの大学<sup>2</sup>の理学系数数学科は、学校教育の指導者を養成することを主眼として設計されていません。

実は、先の大戦の敗戦前には、後期高等教育（いまで言えば、高等学校）において指導的な役割を演ずるべき教員を養成する課程（いわゆる「師範学校」と差別化された「高等師範」）が、しっかりと存在していました。それが、敗戦後 GHQ の指導の下、帝大とともに、廃止されてしまいました。軍国主義教育の「思想的戦犯」と見なされたからです。そして、その際、専門学校や高等学校から“昇格”“水平化”された多くの大学において、教員免許状の認定コース（いわゆる教職）が設置され、その延長上に現代でも、多くの数学科が、数学教員養成の一つのコース<sup>3</sup>になっています。他の課程を出た人と違い、数学世界との出会いの経験が多少なりとも多めにあるので、数学教員の中で指導者となってくれるであろうという期待は私自身にもありますが、大学数学科の教育の現状を考えると、この期待は全面的に安住出来るほど堅固な基礎を有していません。他の「専門」を出た人との大きな違いは、現代数学の高尚さに対して、良い場合には、《強い憧れと深い尊敬》、悪い場

<sup>2</sup>戦前から大学であったところはいわゆる帝大などほんの少数である。

<sup>3</sup>筆者は実に現状に不明にして、つい最近まで知らなかったのですが、理工系大学における数学教員免許取得に設置基準、単位数などで、従来より厳しい制限を付け始めている行政は、その裏では、通信教育のような教員免許に特化した専門コースの卒業生には数学的な知識と経験をほとんど問わずに教員免許を発行することを許容・奨励しているという現実があるようです。

合には、《覚めた絶望と強い嫌悪》を抱いていることであって、学校数学の先にある数学や教科書の記述に隠されている多くの数学的飛躍や、ときには数学的誤解への誘導の罠に気づき、新しい知への向かう若人の戸惑いに共感し、多様な新しい思索にアドバイスを与え、孤独な数学的思索にダイナミズムを与え、それを通じて現代を生きることの中での数学の意味を自分自身がより深く理解するという数学教師の最も大切な任務に気付かないまま過ごしているのは、残念でたまりません。本当につまらない「知識の伝授」（ときにはさらに悲惨な「基礎基本の定着」）だけの日常を、成績認定という権力を振り回して「君臨」している様は、より高い人への劣等感をより低い人への優越感に置き換えるどこかの三流官庁の「エリート官僚」の二十日鼠版のように私には見えます。対照的に、校務以外のことで、熱心に教室に向かう指導的な役割を果たす数学教員が、多くの場合「難解」な入試問題の記憶と答案という「熟練の技」(?)で、学習者に対する優位性を確立した気になっている姿は、「大人」が「子ども」に「大人」しか知らない知識を教えるという「教育の禁じ手」を乱発しているように映ります。いずれも、学校数学へのより深い接近の面白さと難しさという教育の基本をきちんと教育されていないことの結果の一つではないでしょうか。

このような感慨は以前から私がもっていたものですが、TECUM のアイデンティティを作る作業の中でより明確なものになりました。そしてそこで沸いてきたのが、数学教育版ランチョンセミナーであり、海外で私自身が体験した数学教育ワークショップです。通常のセミナーとの違いについては、私が理事会で提案したときの資料を引用しましょう。

## 0.2 資料: 理事会資料から — 一部変更しています



### 数学教育 Work Shop のより具体的な提案

07/05, 2018

#### 0.2.1 Workshop の、研究会との構造的違い

目的と目標の違い

- 独創性よりも普遍性、一般性を旨とした講義
- 学理性よりも、実践性、有用性を旨とした講義
- 「高級な講義」の受動的な聴講ではなく、参加者の能動的、作業的、具体的な参加による知識、技術の獲得

## 受講生の違い

- 「長岡教徒」(松並説)ではなく、一般の数学教員
- 数学的な学力にも教育的な腕力にもいまひとつ自信をもてない、しかし誠実な、若手の数学教員
- 原則として「長岡研の常識」「長岡本の知識」を有していない人を想定

## 講演項目の違い

- 受講生の関心は、数学教育全般ではないことに注意して、主題を絞る必要がある。たとえば「受験指導」とか「中高一貫校の問題」あるいは「高校初年級」に限定する手もあるし、「正の数、負の数」とか「確率統計」など内容的に限定する手もある。
- 最初は良い教材が十分に用意できないので、ある程度、主題が分散することはやむを得ないことは覚悟すべきであろう。

## 配布資料の違い

- 受講生が受講しながら、書き込みができるような、空白の多い、しかし多すぎない(受講生の精神的な負担に配慮して)資料を用意する。
- したがって、分量は 40 ~ 50 pages 程度が必須か。
- 講義に参加しない人が、参加者の資料の現物が欲しいと思うような特別の付加的な重要追加情報<sup>4</sup>が是非とも欲しいと思います。「2018年8月 TECUM Workshop 参加証」のようなものも必要かと思います。

## 0.2.2 具体的な Workshop 組織に向けて

### 各回の Workshop の一貫性 vs. 特色付け

1. 毎回同じでは飽きられる。したがって各回の目玉企画は必須。
2. しかし一貫して流れるのは **TECUM 精神**=本当に深い数理世界への憧憬と教育現場の現実への暖かくかつ厳しい眼差しの共存、言い替えれば、銜学趣味、「研究第一」主義との断固たる決別と、その場しのぎに流れる現場からの冷徹な超越

---

<sup>4</sup>小田和正君ならサインでしょうが、TECUM なら写真でしょうか。最近の結婚式で僕はこの idea に達しましたが、他に募集します！

## とりあえず考えることができるであろう Workshop の主題

ほんの数例ですが。

- 「こんなことで飯を喰っている人がいてもいいんですか?!」
  - － 生徒指導をするとき、基本的人権侵害って分かっていますか？
  - － 憲法も読まずに、生徒に道徳を気楽に指導する先生
  - － 線型代数初歩も知らずに、ベクトルを教えている先生
  - － 負の数を知らずに、Excel や複式簿記を教えている先生
  - － 整数と浮動小数点の区別を知らずに Excel を教えている先生
  - － 必要と十分の関係を知らずに、証明を教えている先生
  - － 現代数学や現代物理の基礎的な知見もなしに、数学や思想、あるいは現代という時代について語る先生
  - － 実態をなにも知らず、「研究者」という言葉に憧れている先生
  - － 学識経験者、有識者、有名人という肩書きに弱い管理職の先生
  - － 国家資格や学会認定があれば生きていけると進路指導する先生
- 「なんのためか、本当に考えたこと、ありますか。」
  - － 数学の扱う対象 (相手) は、なんでしょう
  - － 文字式ってなんですか
  - － 数ってなんですか
  - － 方程式ってなんですか
  - － 不等式ってなんですか
  - － 有理数、無理数ってなんですか
  - － 実数ってなんですか
  - － 幾何には、初等幾何と解析幾何の 2 種類があるのですか。
  - － 代数には、なにがあるのでしょうか。
  - － 解析には、なにがあるのでしょうか。微積がゴールなんですか？
- 自分に厳しくするために、たまには、他人を批判的に見てみましょう？
  - － こんな試験、意味がどこにありますか？どうしたらもう少しまともなものになるでしょう？
  - － 生徒からこんな質問を受けました。授業はどうだったのでしょうか？どうしたらもう少しまともなものになるでしょう？

- 部活指導や進学指導にばかり熱心で、肝腎の数学教育が悲惨な人がいるのですが、どうアドバイスすべきでしょう。
- 大学の数学は、高校以下の数学指導に役立つのですか、それとも無関係なのではないでしょうか。
  - 大学で学んだことが教員になって役立つ実感がありません。
  - 大学では、代数、幾何、解析という主要分野がありますが。高校までに関係するのはなになのでしょう？
  - 大学院に行く意味がありますか？
- 最近の生徒は「数学なんてなんの意味があるのか、なにに役立っているのか」と質問します。
  - 数学が社会で役に立っていることは理系の技術者だけに関係する話ではないでしょうか
  - 普通の生徒には、良い学校に受かること以外に、数学の価値があるのですか
  - なぜ、東大では文科系でも数学を試験で課すのですか。数学苦手の生徒が東大に行きたいときはどう指導すべきでしょう。
  - 国公立＝数学を早く諦めて私立文系で、早慶／関関同立を目指す方が良いのではないのでしょうか。東大、京大と、早慶／関関同立は、どんなに違いがありますか。
  - 自分は数学科をでていないので、ときどき、xxxxx (数学 III の微積分) を教えるとき不安を感じてしまいます。
- 数学科教員の日常のつきあう
  - 教科書の選定、副教材の選び方、模試の選び方で悩むのですが。
  - 自分達で選んだ(あるいは選ばれた)教材に数学的／教育的問題を感じたときは？
  - 課外活動(修学旅行、進学旅行)の業者の選び方で悩むのですが。
  - 自宅学習を活性化できなくて。
  - 予習、復習の意味が伝えられなくて
  - 会議の多さがなんとかならないものなのでしょうか
  - 教科指導以外の教員の校務の意味は？
- 教員の悩みにつきあう。
  - 生徒はどうして熱心に勉強しなのか

- 宿題をやって来ない子どもが増えてきた
- 子どもに過干渉ではないかと思う生徒の親がいたときはどうするか
- 課外活動を通じて生徒指導をすることは、戦前の軍国主義教育とどこが違うか。どこが同じか
- 管理職になりたがっている同僚の気持ちが理解できなくて悩んでしまうのですが。
- 他教科の教員との会話で、数学の重要性をいかに語る事ができるでしょう？
- 最近の生徒は夢がない、と思うのですが、夢を抱かせるにはどうしたら良いのでしょうか？
- 生徒が能力以上の夢を抱いていたときにどう指導すべきでしょう？
- 生徒と保護者の間に、生徒の将来像についての夢が掛け離れているとき、どう指導すべきでしょう??
- 管理職が、掲げる教育目標が、現実の生徒を目の当りにすると、非現実的だと思ったときに数学教員ができることは？
- 校務以外に存在意義がないと断定された私の生きる道は？

- その他

- 大学進学指導に向けての悩み
- 生活事案についての悩み
- 自分自身数学の勉強に関する悩み

♡ *clubsuit diasuit spadesuite*

### 0.3 実際に動かしてみると、

上の引用が証明しているように、そもそも企画するのが遅すぎたので、講師の日程調整も容易でなく、ダメになってしまったり、奇跡的に空けていただいたりの、「山あり、谷あり」で、当初は、どこに向かってとりあえずはなにを目標とすべきか、まったく見えず、企画に無理がありすぎたかと反省したりもしました。思ってもいなかった方から協力のお申し出をいただいていた、急に元気になったり、それがやはり無理であると分かって意気消沈したり、まるで、私が、子ども扱いされて育ってしまった大学生に対して、よく言ってきた「おだてりや頭に乘る、叱ればしよげる」のような毎日でした。

そもそも、私自身、はじめての挑戦で、どのような原稿を書くべきか、自問の苦しい日々が続きました。最初は、全部一人で担当しなければならない

か、という悲壮な決心するして、品質は二の次として、原稿を書きまくる様相を呈していた時期もあります。

ようやく、印刷製本のプロセスに入る直前になって、私以外の原稿も出てホッと安堵しているところですが、より本格的な workshop に向けて、皆様の厳しくもまた暖かいご意見を伺いながら、次の教材に向けて改善を繰り返して参りたいと考えております。

2018年7月31日

長岡 亮介