TECUM Letter

２０２０年１２月号 創刊第１８号 （通巻１9号，認証 NPO 法人成立３年度第５号）

目次

1 はじめに

今回は、最初に重要な訃報があります。本 NPO 法人の名誉会員をお引き受けくださっていた有馬朗人先生が今月６日に急逝なさいました。原子核物理学における高名な物理学者で、元東大教授、東大総長、参議院議員、文科省大臣などの要職を歴任後も、武蔵学園理事長など数え切れないほどの研究機関、教育機関の要職を歴任された他、俳人として有名な国際的文化人でした。謹んで感謝と哀悼の気持を表します。

さる１１月の研究会は、論考集の厚み、発表論考の個数など、従来と比べると若干寂しい外観がありましたが、Zoom 研究会という形式のため、新しい参加者もあり、いつも以上に盛り上がる場面もありました。２月もこのような形式での研究会になります。賛助会員はもちろん一般市民の方も参加できますので、是非お誘いあって参加なさってください。予定が確定したら御連絡致します。

また 従来、大学の大教室を借りて行っていた、現役教師と教員志望の学生のための実践的な数学教育ワークショップは、今年度は、Zoom を介したミニワークショップとして １１月下旬にプレゼミを実施し、１２月から毎週木曜日の夜に開催しています。私にとっては感動的なことに、敢えて「不登校」を選択した、中学２年生！の優秀な女子生徒が最年少の受講生として参加してくれています。他の ミニワークショップも会員のご希望によりできるだけ機動的に対応して行きたいと考えています。御要望を事務局 tecumoffice@flexcool.net にお寄せください。

2 会員の相互交流のページ

今回ご寄稿頂いたのは、自然科学系の学術出版社森北出版編集部の加藤義之氏です。ご寄稿からは御自身はまだ小学生の子育てという、老人の私から観ると羨ましいような、また気の毒のような忙しい時期を生きていらっしゃるようで、親の立場に立つと、自分の受けて来た教育と次世代の教育という問題が他人事ではない切実感を持って見えて来ていらっしゃるのだろうと想像します。そういう幸せな忙しさの中にありながら、「先生」と呼ばれる教員への篤い期待の原稿をお寄せくださいました。

Corona 禍の中でも、会社に通勤して平常通りの勤務を継続なさったそうなので、隣りの席との間に十分な物理距離がある、馬鹿げた呑み会を強制されない、羨ましく良い勤務環境を想像しますが、今回「不要不急」の仕事をしていたと見せつけられて「楽になった」と感じている一般の人には考えられない、原稿の提出の遅い著者にいかに良いものを書かせるか、それをいかに形にするか、という「必要緊急」の仕事を抱えて頑張っていらっしゃる氏の姿が彷彿とします。

そして、読書＝自学は、毎日の生活を豊かにする人生の栄養であることを改めて思いました。若い学習者の毎日が知的な学びの場となるように、「教育とは学び方を教えるものである」という言葉が現実のものとなるように、時代の潮流を反転させなければ、とは、老いの一徹の決意です。

長岡

先生への，エールといいながらお願い

加藤 義之

私は，理工系の高専・大学向け教科書や専門書の編集者をしています。ただ，数学については大学の基礎程度で終わってしまった口なので，自分の高校時代までのことを思い出しながら，また小学生の子どもをもつ親でもあるので，「先生」へのエールとしてまとめてみたいと思います。

まず私自身のことから始めます。編集者という仕事を選んだ理由にはいろいろありますが，本が好きであったことが一番大きいと思います。学生時代は自由な時間が多かったからということもありますが，社会人になったいまでも，通勤時や就寝前など時間をみつけては本を読みます。科学系読み物やミステリーを中心とした小説が多いものの，ビジネス書，エッセイ，自伝など，とくにジャンルにこだわらず，そのときそのときで気になったものを読んでいます。苦手なものといえば，理工系の専門書くらいです（!?）。最近では，子どもの関係で絵本を読むことも増えました。少ない言葉で伝えなければならないので，絵本も奥が深いです。これはなにも私に限ったことではないでしょう。分野を問わず編集者であれば，みなプライベートでよく本を読んでいると思います。

編集者という職業柄，本を読むことは仕事の面で直接プラスになります。話の展開の仕方，わかりやすい文章，見やすいレイアウトなど，編集するにあたって直接参考にできるからです。といっても，仕事に限らず「知りたい」「学びたい」ことがあるから本を読んでいるので，編集者でなかったとしても本は読んでいたと思います。好奇心ですね。職業柄，本を推しましたが，最近ではインターネットでも情報は得られるため，単純な調べものなどはそちらを頼っています。ただ，著者の考えが筋道を立ててまとめられているという点では，まだ書籍のほうが十分練られていると感じますので，本を読まなくなることもしばらくはないと思います。

このように，私からすれば，年齢に関係なく，本を読むこと（＝学ぶこと）は生きるうえでとても重要なことと思いますが，学ぼうという意欲があまりない大人が増えているように思います。学校という受動的にでも学ぶ場に行かなくなるからでしょうか。スマホゲームなどエンターテイメントが多様化し，ニッチな生活時間までも侵食し始めて，時間をとられてしまっているからでしょうか。

「なぜ学ばなくなるのか」　我が子を見ていて思い当たったのは，「勉強（学ぶ）＝楽しくない」という考えに至ってしまっているのではないかということです。学ぶことが楽しくなければ，試験や受験がないのにわざわざ学びませんよね。では，なにが「勉強（学ぶ）＝楽しくない」にさせたのか。私が我が子についついやってしまうことといえば，子どもに合わせて時間をとれないことが多いため，親の都合で宿題などを急かしてしまうことです。やさしい言葉で書きましたが，強要です。強要されれば反発するのは自然です。もしこれが当たっているとすれば，子どものときのちょっとした行き違いで学ぶことをやめてしまうのは，まだたくさん残っている人生にとって，とてももったいないことです。この点で子どもとうまくつきあえていない親は少なくないと思います。

正直なところ，私自身，学生時代に先生から大きな影響を受けたというようなことはないと思っています。それでも，なかにはいまでも授業の様子を覚えている先生がいます。その先生方をあらためて思い浮かべてみると，みな「楽しそうに教えている」という点で共通していたように思います。決して，子どもに迎合しているというのではありませんし，教えるのがうまいうまくないという話でもありません。あくまで先生自身が楽しそうに話していました。残念ながら，その先生方の教科がとくに好きになり，より一層学ぼうと意気込んだという記憶はないのですが，少なくともその先生方の授業は楽しくなかったということはなく，居眠りをするようなこともなかったように思います。私

の親は勉強を強要することはありませんでしたが，いまにして思えば，先生からも良い影響を受けていたのでしょう。
先生という仕事は，大勢を一人で見て予定どおり進めなければならないでしょうし，親への個別対応など面倒なこともあるでしょう。なにより事務的な仕事も多く，いろいろとたいへんな仕事であると思います。ただ，人生において重要な「学ぶ」楽しさを伝えられる素晴らしい仕事であると思います。親の失敗を先生に任せてしまうようで恐縮ですが，親は所詮数回しか子育てしないアマチュアですから，ぜひとも学ぶ楽しさを伝えることについてはプロである先生にお願いしたいです。
学ぶ楽しさを伝えるのに必要なことといえば，もちろん自分が学ぶことですよね。全然読まない人に本を薦められても読もうと思えないのと一緒です。たくさん読んでいる人から薦められると読んでみたくなります。

「どこで学ぶか」
「TECUM でしょ！」

はさすがに流行語にならないとは思いますが，TECUM のような自由に学ぶ場があるわけですから，これを利用しない手はありません。同様に，本も学ぶための重要な道具です。私はこれからも本からいろいろと学ぶとともに，意義のある本の出版に励んでいきたいと思っていますので，先生方も忙しいとは思いますが，TECUM や本を大いに活用して学び，子どもたちに学ぶ楽しさを伝えていっていただきたいと思います。

3　連載論考: 数学と物理の間

公共料金について

平尾 淳一

公共料金の定義と一覧は消費者庁のウェブサイト https://www.caa.go.jp/policies/policy/consumer_research/price_measures/utility_bills/about_001/ の「公共料金とは」にあるが，ここでは電気・ガス・水道などの料金を考えてみよう．これらの使用料金は契約形態などによってやや込み入った計算式に基づいて計算されるが，大まかにいうと料金 y は基本料金 b と使用量 x に比例する従量料金 ax の和

$$y = ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

になっていて，さらにこの従量料金が段階的になっていることが多い．
表 1 は東京ガスの使用料金表（月額）からの抜粋である．月々の使用量に応じた区分 A - F ごとに基本料金 b と

表 1　ガス料金

区分	使用量/m^3	基本料金 /円	基準単価 /(円/m^3)
A	0 - 20	759	145.31
B	20 - 80	1,056	130.46
C	80 - 200	1,232	128.26
D	200 - 500	1,892	124.96
E	500 - 800	6,292	116.16
F	800 -	12,452	108.46

従量料金の単価 a が定められている．これにしたがって描かれたグラフが図 1 である．グラフは 1 つの直線と区別つきにくいが，よく見ると各区分ごとの線分からなる折れ線になっている．区分の境界でグラフが連続になるようにパラメタ a，b が定められていることがわかる．たとえば区分 B と C の境界での料金 y はどちらの区分のパラメタにしたがって計算しても

$$y = 130.46 \times 80 + 1056 = 128.26 \times 80 + 1232 = 11492.8\,円 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

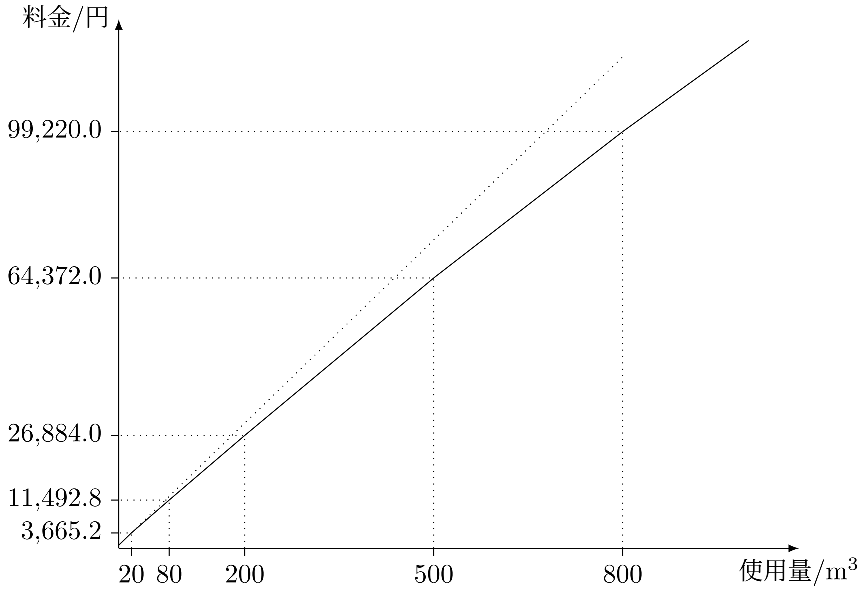

図 1　ガス料金

となって互いに等しくなっている．

電力料金や水道料金も基本的にこのような段階的な料金体系を持っているが，パラメタの与え方が少し異なる．東京電力の従量電灯 B では，電力量料金は契約種別によって表 2 のように，異なる基本料金が設定される．この契約種別は後出する水道料金における呼び径に対応する．10 A，20 A などは許容される最大の電流（単位はアンペア）を表している．これに対して従量料金は契約種別によらず段階的に単価が決められている．基本料金を b，段階の境界値を $x_1 = 120\,\mathrm{kWh}$，$x_2 = 300\,\mathrm{kWh}$ とし，各段階の単価を $a_1 = 19.98\,円/\mathrm{kWh}$，$a_2 = 26.48\,円/\mathrm{kWh}$，$a_3 = 30.57\,円/\mathrm{kWh}$ とおくと，料金は

表 2　電力量料金

契約種別	10A	15A	20A	30A	40A	50A	60A
基本料金 /円	286	429	572	858	1,144	1,430	1,716

料金段階	使用量 /kWh	単価 /(円/kWh)
第 1 段階	0 - 120	19.88
第 2 段階	120 - 300	26.48
第 3 段階	300 -	30.57

$$y = \begin{cases} a_1 x + b & 0 \le x \le x_1 \\ a_1 x_1 + a_2(x - x_1) + b & x_1 < x \le x_2 \\ a_1 x_1 + a_2(x_2 - x_1) + a_3(x - x_2) + b & x_2 < x \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる．これをグラフにしたものが図 2 である．異なる契約種別のグラフの間の関係に注意しよう．また，ガス料金の場合と違って使用量が増すにつれて単価すなわちグラフの傾きが大きくなっているのは興味深い．

せっかくだから水道料金についても調べよう．表 3 における呼び径とは給水管の口径を意味し，供給しうる水量がこれで決まる．電力料金における契約種別（電流：アンペア）に対応するものと考えられる．水道料金の場合も従量料金は段階的であるが，呼び径ごとに異なる単価が設定されている点が電力料金との違いである．特に単価すなわちグラフの傾きが 0 となる場合もある．表 3 にもとづくグラフの一部を図 3 に示しておく．

これらのグラフを見ると任意の関数のグラフを折れ線で近似することがそれほど悪くないことがわかる．これらの折れ線グラフが滑らかな曲線 $y = f(x)$ を近似するものとすれば各区間の単価は導関数 $f'(x)$ を近似するものとなる．

表 3　水道料金

呼び径（口径）	13 mm	20 mm	30 mm	···
基本料金	860	1,170	3,435	···

使用量/m^3	13 mm	20 mm	30 mm	···
0 - 5	0	0	213	···
5 - 10	22	22	213	···
10 - 20	128	128	213	···
20 - 30	163	163	213	···
30 - 50	202	202	213	···
50 - 100	213	213	213	···
100 - 200	298	298	298	···
200 - 1,000	372	372	372	···
1,000 -	404	404	404	···

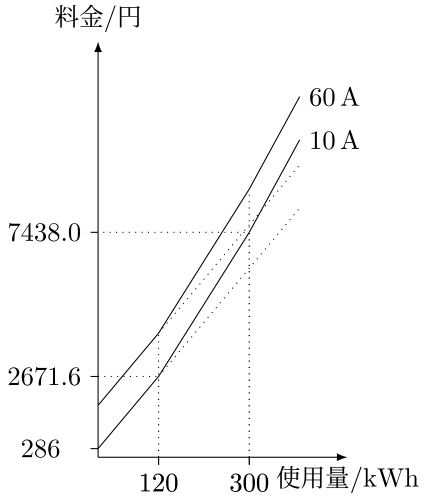

図 2　電力料金

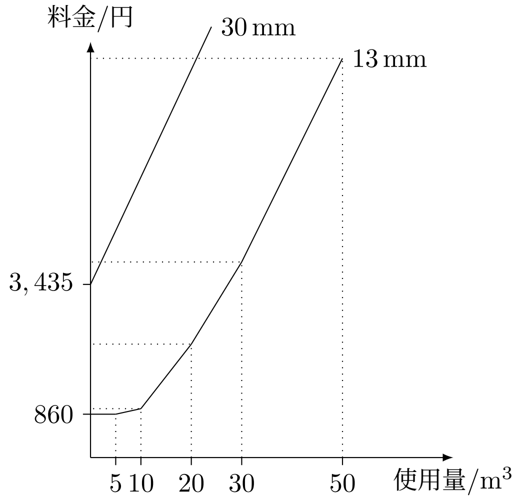

図 3　水道料金

もうひとつ，グラフを描いてみて気付くことはガス料金，電力料金，水道料金それぞれの特徴である．ガス料金は使用量にしたがって単価が安くなっている．グラフは上に凸である．これに対して残りふたつは下に凸のグラフになっている．また，水道料金は他のふたつに比べてグラフの y 切片が大きいこともわかる．

きっとそれぞれに事情・理念があるのだろう．

4　『もはや数学には無関心！』という会員のためのページ

毎回、自分自身が最近観て、TECUM の活動を応援してくださる賛助会員の方々が、広い意味での数学的世界に関心を持って頂くことができ、数学／教育に関わる人には是非観て欲しいという基準で選んだ映画の御紹介をして参りましたが、今回もこの趣旨に極めてふさわしいと映画が見付けることができました。*Lorenzo's Oil* [*1]です。

しかしながら、最下行の字幕を読むことのできない我が家の 故障した TV monitor とますます悪化している私の

[*1] 今回の映画の邦訳「ロンレンツォのオイル」は、興行成績を意識する奇妙な意訳が横行する日本語字幕映画の伝統を考慮すると直訳である分だけまともです。ただし「／命の詩」というスラッシュで始まる余計な解説用副題がついていることを除けば、であり、また、舞台の中心が米国ワシントンだとすると、「ロレンゾ」の方が直訳ですが、主人公の一人がイタリア人ということで、文化的な背景を考えると、許される誤訳の範囲内だと思います。

視力問題に加え、語学 (米語、伊語、仏語、東アフリカの言語) の力不足問題はじめ、いろいろな意味で私には難し過ぎ、主題が重過ぎて、中身を気楽に紹介することができません。そこで今月号と次号とに分けて紹介します。皆さんにもゆっくりと反復する時間を確保して欲しいすごい映画だからです。

Amazon の Prime TV では残念ながら有料ですが、３日間のレンタルでは解読し切れない、深い内容のある作品で購入して損はないと思いますが、Amazon の Fire TV や PC 以外は、iPad など便利な端末では購入して観ることができないのは残念です。

話の概要は、突然深刻な病状を発症した吾子のために奮闘するオルドーネ夫妻 (Nick Nolte 演ずる国際経済専門家である夫 Augusto Odone と、Suzan Sarandon 演ずるその妻 Michaela Odone) の、息子 (Zack O'Malley Greenburug 演ずる Lorenzo Odone) の介護と快復への夫妻の奮闘の日々を描く実話に基づく展開です。

彼らの奮闘の最初の成果が、Peter Ustiov 演ずる Gus Nikolais 医師との出会いを通じて、息子の異常が、「副腎白質ジストロフィー Adrenoleukodystrophy, ALD 」と呼ばれる X 性染色体上の遺伝子に伴うの難病によるものであるという事態の受容と理解でした。

ALD は、通常なら必要以上になったら酵素の持つ代謝作用で自然に排出されるはずの「長鎖脂肪酸」（この種の化学的／生化学的な専門用語がストーリ展開のキーワードになっていることがこの映画が安易な理解を阻む第一の理由です。）が神経細胞内に蓄積し、それが『何らかの作用で』（これは次回に述べますが同じく映画のキーワードの一つです）中枢神経の情報伝達で決定的な役割を演ずる《絶縁体》の軸索の髄鞘(ずいしょう)部分の ミエリン (myelin, 英語ではマイエリン) を剥ぎ取り（そのような先端基礎医学の専門用語がたくさん出てくることが専門外の人間に難解なもう一つの理由です)、それによって脳の機能が失われ、聴覚、視覚、四肢、言語、情報交換すべてに障害が急速に広がって２年ほどの短期間で死に至る、という１７例の臨床病理症例報告 case study がまとめられた直後の深刻な病気であり、快復の見込みはない、という事実に正面から向かい合う決意をするのが奮闘の第１ステージの最後です。

当時の医学の先端的な常識では、脳神経の病気では、快復の可能性はなく、単に、病状の進行を遅らせるために日々の食事から長鎖脂肪酸を含むものを排除する、という、いかにも考えそうな消極的なものであった分けです。

この後の展開のもう少し詳しいご紹介は次回に譲ることにして、今回は映画全体の主動機といって良い、映画冒頭のキャプションを紹介しましょう。

それは、黒い背景に登場する

> “ Life has meaning only in the sruggle. Triumph or defeat is in the hands of the Gods... So let us celebrate the struggle! ”
>
> Swahiri Warriror Song

です。字幕では、

> この人生は戦いだ。 勝敗は神の手にある。戦いを祝福しよう。スワヒリ戦士の歌より

となっているのですが、本来の意味を考えると、このテロップの翻訳は、

> 生きることの意味は、死にもの狂いの戦いにこそある。戦いに勝つか敗けるかは神々のみぞ知る。…… だから戦いを祝おう！
>
> スワヒリ語の[*2]戦士の歌

というところでしょう。

この言葉に映画のすべてが凝縮されているといっても良い大切な部分なので、わが国でしばしば観られる、listening 能力は極めて高くても、それ以外の一般教養が国民のレベルに到達していない映画翻訳家の余計な親切が失敗してい

[*2] あるいは「スワヒリ語圏の」と訳すべきかも知れません。さらに進んで「東アフリカ地域に伝わる」と意訳することもできるでしょう。実際、映画の主人公一家は Augusto の国連の世界銀行の仕事で、政情不安で経済の低迷していたコモロ諸島（映画が描いている時代には、コモロ・イスラム連邦共和国）に派遣されていたという話です。

る例として触れました。

ところで、筋萎縮性側索硬化症 (ALS、いわゆる筋ジストロフィーとは同じ難病でも違います！）は、著明な宇宙物理学者 Stephen W. Hawking の大活躍でわが国でも有名ですが、私自身も、家族の献身的な介護を受けつつも不可逆的に進行する病状の変化で最終的には若い愛弟子の一人を近年この病気で失い、難病の恐ろしさを身近に感じておりましたが、「ジストロフィー distrophy」がもともとは dys + trophe であって「栄養 (troph) 障害 (dus)」、転じて「筋肉障害」を含意することが一般的になっていたことを今回はじめて知 りました。優勝者を讃える trophy とはまったく違う語源です。

この映画がいろいろとアカデミー賞などにノミネートされながら、「興行的には大失敗」という結果になったのは、その《あまりの難解さ》にあったのではないかと思います。上で触れたように、専門家以外にはあまり知られていないであろう ALD の基礎医学的な理解が前提となっていることもそうですが、それ以上に、《世間の常識に対して》**あまりに《非妥協的に戦う struggle 》**Odone 夫妻の姿が、一般の人には理解困難、共感困難であることがありましょう。

ちなみに、症例報告中の blind を「失明」と訳すのは正しいとしても hyperactive（活動性過剰）, inattentive（注意散漫）を「過敏症」と、deaf を「強度の難聴」、mute を「言語障害」と訳すのはいかがなものでしょうか。blind を「失明」と訳すならそのまま deaf は「聴力喪失」と、mute は「会話力の喪失」と訳すべきでしょう。「しょうがい者」と書くような表面的な「弱者への配慮」で表面的な「いたわりの心」を演出するのは、あまりに安っぽい恥ずべきことではないかと思うのですが、わが国を覆っているこのような軽薄な風潮は、自分こそが弱者の立場に立っていると思い込んでいる「正義の味方」が推進しているだけに、積極的な推進者でない人も、「反撃が恐い」ので、この流れに乗るという無責任な方向に流れている結果ではないかと思います。わが国の最近のこの問題を考える際にも、この映画の冒頭の言葉は、重要であるのではないでしょうか。

5　書評のページ

今回は、「TECUM + 茗渓学園ジョイントプロジェクト」を受け、拙著『**君たちは数学で何を学ぶべきか—— 《自学》の力**』(日本評論社) について二つの書評を頂きました。TECUM の内部の方ですからもっと厳しい批判を予想していたのですが、それぞれから老人へのいたわりと激励を感じました。なお、このジョイントプロジェクトについては後日談、今後への展望を含め、谷田部篤雄氏の紹介が『数学セミナー』２０２０年１２月号特集に異色の記事として精彩を放っています。

長岡 亮介

数学に感動があることを教えてくれる本

高田順江

この本は「若者・教育関係者・保護者」に贈ると帯に記していますが、半世紀前に「学び」を終えてしまったシニア世代にとっても、死ぬ前に「知的に」なれるチャンスを与えてくれる本です。「コロナ自粛」というわけで、うちの中で過ごす時間が多くなった人にとって、それは「学び」タイムであると指摘しています。本当は学校時代に身につけるべきは「学びの学び」と、著者は述べています。「学び」とは、理解の苦しみと喜びの体験であると。「わかった！」という喜びの経験を通して、《本当の理解を目指す教育》をミッションとして生涯実践している教育者に巡り会えたことは、私の人生の幸運です。

長岡先生の数学史のレクチャーを受けていて、受験勉強の数学は 17 世紀以前のもので、数学に 18 世紀から革命が起きていたことを知ったのは衝撃的でした。革命といえば、フランス革命やロシア革命、または産業革命のようなことしかイメージがありませんでした。それまでの世界では考えもつかない世界観が創出していたのです。19 世紀から 20 世紀にかけて勃興した抽象数学の世界に出会うという経験がなかったのです。数学についての大きな誤解は、高校までの数学が計算することに終わっていて、革命後の数学に触れていないことです。自分では表現できない内なる感性を音楽によって耳で共鳴し、美術によって目で共感することで心から感動します。同様に、数学の世界で美しい数学が創造力によって生まれたということに感動しました。この全く新しい数学を学ぶのに古希を過ぎても遅くはない

と、私はこれからが楽しみになってきています。

本書は、何のために数学を学ぶのかをテーマに行った長岡亮介先生の「茗渓学園でのオンライン講演会」を収録しています。そこで事前に配布された【参考資料】2 次関数 $f(x)=x^2$ の不思議な魅力を紹介しています。本当の数学の学習へのガイドで、問題が出されていて、早速取り組んでみましたが、理解できずとても無理でした。その基本性質として、(1) 不動点、(2) 線対称性、(3) 非負性、(4) 左右発散性、(5) 頂点付近での振る舞いの 5 つを挙げています。課題、研究課題、思考実験、数学的な問題、発展的研究課題が与えられ、解答例も提示されています。これだけで 20 ページ以上あります。ここを読むだけでも「わかった！」という感動を得られます。

最後に長岡先生の考える《理想の数学カリキュラム》があります。学年別ではなくて、領域別に学ぶように体系化されています。学び直しをする全ての人に、数学とは何かを示してくれる素晴らしいカリキュラムです。数学は言語を超えた共通概念であり、知的に無限に広がる世界が頭の中にあるのです。想像するだけでとてもワクワクしてきます。きっとこの本を手にする方は同じような衝撃を受けることでしょう。様々な人にとって本書は数学の夢と希望が詰まっています。

自学の力

松並奏史

人との物理的な接触をできる限り避けるよう「要請」されているコロナ禍。今年の上旬，いわゆる緊急事態宣言下，これまで通りに学校教育を継続することが困難な環境を逆手にとり，「自学自習」を基本とする数学の授業スタイルを根付かせた茗溪学園の教員たちの思想・方法・展望の躍動的な論稿，そしてその方向性に思想的・理論的・実践的基盤を与える長岡先生の講演会の記録が本書の白眉だ。

本書の主張は端的である。『学校教員の使命は，生徒に《自ら学習する力》＝《自学の力》を身につけることに尽きる』。《自ら学習する》とは？学習の目的は？方法は？その盲点は？そのような学校教育を実現する方法は？それを阻むものは？あらゆる角度からその主張を点検・分析し，その意義を丹念に解きほぐす。実際の現場ではともすれば空想のように響きかねない主張が，コロナ禍という特異な状況だからこそ，生徒たちがオンライン授業という学習環境に迫られたからこそ，非常に強い説得力をもって現場に浸透していったことがわかる。

本書を読んで印象的だったのが，《自学》に重きをおく必然的な帰結として，“ わかりやすさ ” に対しても慎重になるということだ。これはもちろん，“ わかりにくさ ” を称揚するということではない。真に難しいことを「わかった気にさせる」，あるいは「わかりやすく虚飾する」ことに慎重であろう，ということである。そして，本書の深みはその慎重さのさらに奥にある。「難しいものを難しいままに，けれど魅力的に語り，伝える」様子がよくわかるのである。その「魅力」が損なわれることを承知の上で，あえてその魅力を言葉にすれば，《透徹した理解に基づいた上で，余韻を残して内容を語る》とでもいうことができるかもしれない。そうした魅力が《自学》を推進する力になる。「授業ではその魅力さえ伝えられれば十分，あとは生徒の余力に任せる」。実に新鮮な視点である。

本書を通読し，確信したことがある。《自学》を中心に据えた学校教育の「目的」に照らせば，入試も評価も，そして授業さえもが，学校教育の「方法」に過ぎないのだと。言われてみれば当たり前のこのことが，なぜだか私の目に入っておらず，その方法ばかりに目を奪われていたことを自覚した。本書は，私にとって，時代を超えて教育を考える指針となる本である。

6　連載論考: 意外に深い初等数学の不思議な世界 (6)

長岡 亮介

6.1　初等数学の難しさの核心

今回は冒頭から結論的なことを申し上げます。

初等数学には様々な難しさの《側面》があるのですが、究極的な問題点を一言に指摘するとすれば、初等数学の教育は、

- 実践的には《現実の生活世界》に密着する《実用的な健全性》に依拠している
  にもかかわらず
- しばしばタテマエとして《厳密な論理性》、《完璧な正解》という《理想の御旗》を掲げる

という、悪く言えば、《本質的な論理的矛盾》を抱えている、良くいえば **《数学の良いとこ取り》** という **【こずるいコウモリ役】** を演ずる点です。

これを、《総合的俯瞰的に考える》という知らんぷりで切り捨ててしまうことが許されるとすれば「明瞭に突き詰めて批判的に思索することなく、きれい言葉の場当たり的なその場凌ぎを繰り返す腰が定まらない優柔不断の無責任」という醜態に行き突くことになってしまうでしょう。

しかし、実際の数学教育の場合は、だいぶ違います。それはそのときどきの学習者のレベルに応じて、話題を少しずつその変化に気づかれないようにずらし、次第次第に、昔の嘘をより巧妙な新しい嘘にすり替えて行くことで、その時々に現実世界の基盤に戻り、また新しい論理的な厳密性を確保して行くという離れ業をやってのけているということです。

要するに、首尾一貫しているように装いながら、《少し新しい問題への少し新しいアプローチ》という形で話題を発展的に入れ換えて学習者がそのギャップに気づかないようにすり抜けているのです。

そのような例は、数学教育の随所に見付けることができます。

小学校の場合で言えば、「小学生には難しい」という理由で？《0》の概念をきちんと踏まえないまま、$1, 2, 3, 4, \cdots$ のような数字の学習から、$1+1=2$ とか、$5+3=8$ のような小さな整数の計算の和に進み、10 を通じて数 0 の代わりに数字 0 を《密輸入》したら、$8+5=13$ のような繰り上がりを含む計算、$201-12=189$ のような繰り下がりを含む計算を通じて、結果として十進くらい取り記数法の教育に進むのはそのような数学教育の最初の例でしょう。

位取り記数法の意義が明確になるのは乗法、除法ですが、その際になってももっとも最重要なステップである乗法の計算で教えられる際、必須の概念としての 0 が算数で扱いが避けられていることは、位取り記数法の「九九」という言い回しにも現れています。本来は「零の段」を含め「十十」であるはずだからです。

かつてはわが国で「国民的大論争」の的になった円周率の近似値も、「3 ですませて良い」のか（文科省はそのような言明を言質に取られ、結局、「ゆとりカリキュラム」の看板を引き下ろさざるを得なくなりました！）、「3.14 でなければいけない」のか（所詮は近似値にすぎないので、これも中途半端な妥協に過ぎませんからこんな立論は成立し得ません！）、そんな問題は、数学的には、本質的な話にはなるはずがないのですが、学校現場の本当の声に耳を傾けない文教行政と「教育専門家」のとんちんかんな理想論と、その底の浅さを突いて騒ぎ立てる利に聡い大手塾業界などの商業主義の対立構図の中での政治的な動きとして考えれば、馬鹿げた論争に隠されたことがらの本質が少し良く見えるのではないでしょうか。

そんなものなら、アルキメデスの、連分数による簡単な上からの最適評価である $\dfrac{22}{7}(=\ 3.142857\cdots)$ の方が数学的には理論的にも教育的にもエレガントであると思いますし、工学的実用性を考慮すると、用途によっては $\pi = 3.141592\cdots$ の近似値は 3.142 でも 3.1415 でも良いという《余裕》(技術では、もっとも大切な《遊び》) が重要でしょう。このような《余裕》が一切失われたかのようなヒステリー状況は、初等数学の持つ本質的な矛盾を理解していない、哲学的に貧困な原理主義的な動きであったかと思います。

そもそも数学的には、円周率の近似値よりは、むしろ、円という曲線図形に対して、正方形、三角形のような直線図形と同様似、面積を考得ることができることの不思議に迫ることの方が面白く、しかも高尚であるのではないかと思います。古くは、古代ギリシャのユークリッドの『原論』には円が扱われながら、円周率の話は一切登場しないこ

とを知る人は少ないでしょう。

しかし、そのような理論的基礎になる話題には学校で教えられる算数／数学ではあまり関心が行きません。確かに、下手に関心を持って理論的な問題に接近すると、タテマエに生きる行政側とホンネに生きる非正規教育業界側の間(はざま)を賢く生きるコウモリである数学教育が卑怯者として逃げる以外になくなってしまうからではないかと思います。

このような事例は、小学校の数学（算数）の図形の関係の教育に多く見付けることができます。そもそも、図形の教育は一切の定義もなくあるとき突然始まり、いつのまにか直線、線分、円、垂直、etc. , etc. という基本概念を実用的な態度で学び、「点には大きさがない」、「直線には幅がない」というような理念的な抽象化を達成し、三角形、四角形、と進んで行きます。しかし、最初の出発点にある大きさがない点も、幅がない線も、人間の目には見えるはずもなく、それを幼い学習者が理解できることは異様なことではないでしょうか。学校数学では、折り紙などを活用するようですが、顕微鏡が普及している今日、ちょっと拡大してみれば、そういう**実験的な経験主義的アプローチの幾何教育に、数学的な無理がある**ことは明らかですが、同時に、**厳密に論理的なアプローチが学校教育では容易でない、**という認識がより鮮明に共有されるべきです。少なくとも、数学教育に携わるものは、**自分達の数学知識に多くの欠陥があることを謙虚に認識**し、にも関わらず、数学においては学習者それぞれがそれなりのレベルで**確実な理解を達成して行く奇跡に感動する理解の懐(ふところ)の深さ**を持ちたいと思います。

『数学教育では、安易に理想を語ってはならない』 — これが初等的な学校数学の難しさです。

6.2 以下は、とりあえずは今回の特別の読みきり記事ですが。

最近中学２年生の女子学生から email を頂きました。その一部を無断で引用します。

> 私は式の展開・因数分解の単元で公式を覚えなければならないことに疑問を感じました。なぜ疑問を感じたかというと、例えば $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の公式は、左辺を計算すると右辺になりますが、なぜ右辺が $(a+b)^2$ において全てに通用するのか？と思ったのです。というのも式の展開をした後、操作を続けると因数分解され元の式に戻ります。円で例えると因数分解された式に式の展開をしたら半周、もう一度因数分解して元の形に戻ったらもう半周で一周まわったことになるので、半周した地点がちょうど入り口と出口のようなそのようなものだと考えていますので、$(a+b)^2$ の公式はそのまま展開した $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$ だと思いました。この場合公式とは $ab + ab$ が $2ab$ となっているというところの違いですが、$2ab$ にしてしまうと因数分解の側に進んでいるのではないか？つまり半周より先に行ってしまっているのではないか？と思いました。
> 長々と書きましたが、つまりは、$(a+b)(a+b)$ の公式はなぜ $a^2 + 2ab + b^2$ のこの地点なのか疑問に思ったのです。この地点でない操作の地点、例えば $a^2 + ab + ab + b^2$ を公式として覚えても問題はないのでは？と思ったのです。
> でもこの問いを考えていると今度は分配法則について、今まではあまり深く考えたことはありませんでしたがなぜ $a(b+c)$ は $ab + ac$ になるのだろうとか、( ) (かっこ) の意味は何だろうとか、疑問が止まらなくなってしまったので結局今はこれらの疑問の解明をストップしている状況です。探究目的でやるのは問題ないと思いますが、私はまだ基礎をいっぱい学ばなくてはならない段階で、このようなことにいちいち向き合っていくのにためらいを感じていまして、この疑問をどのように処理していけば良いのか迷っています。

数式を LaTeX 用のコマンドで括っただけでほぼ原文のままの引用です。

私は、学校の数学の先生方は、このような疑問を提起されたならどう反応するのか、詳しくは想像できませんが、おそらく「 $ab = ba$ だから $2ab$ とまとめなければいけないんだよ」という「やさしそうな指導」から、「教科書に載っている公式をきちんと覚えて練習して行けばそういう疑問はふっ飛ぶから練習を増やせ」という「高圧的な指導」まで両極の間の多様な違いはあっても、**この疑問の持つ数学的な重要性** や**この質問が登場する教科書教育の致命的な欠点**に気づく人は希ではないかと不安に思います。

それは中学生らしい表現の素朴さの中に隠されている数学的な核心を見しようという**《数学の論理的な精神》**とそれに裏打ちされた**《数学教育的な度量》**が期待できない風景を私自身たくさん見聞して来たからです。

展開と因数分解は、逆演算ですから、それを円環でイメージするのは、一般的ではないかも知れませんが、理解のダイ) ナミズムを感じさせて私自身は譬えとして優れているとも思うのですが、彼女の質問の核心はそこではありません。

正直に告白すると、私も最初は分からなかったのですが、重要なポイントは、展開 expansion が、分配法則

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc$$

に基づいていた変形であるとすれば、$(a+b)^2$ の展開は、平方記号の定義と分配法則にしたがって、まずは第一段階として

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$$

あるいは、

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b$$

という変形があり、この次に、もう一度分配法則を使って

$$a(a+b) + b(a+b) = (aa+ab) + (ba+bb)$$

あるいは、

$$(a+b)a + (a+b)b = (aa+ba) + (ab+bb)$$

と変形され、ここで平方記号を用いれば $a^2 + ab + ba + b^2$ あるいは $a^2 + ba + ab + b^2$ となるのですが、ここで $ab = ba$ という交換法則を仮定すれば $a^2 + ab + ab + b^2$ とは変形できるでしょうが、ここからさらにその中に含まれる項の和について

$$ab + ab = 2ab$$

とする変形は、もし詳しくは、

$$1ab + 1ab = (1+1)ab$$

という逆の分配法則を利用しているとすれば、展開の計算の最後に、展開とは逆の因数分解をしていることになってしまうのではないか、という、極めて深い根源的な疑問であることに、しばらく考えて気づきました。

この問題に数学的に最も筋の良さそうな解答は、次回以降、別の機会に譲りますが、一つだけ注意しておきたいと思うのは、展開、因数分解の教育で、それらと**分配法則**との関連を強調することは「数学の基礎基本を重視する」先生方の指導の場合でもよくありそうですが、上の例からも明らかのように、実は、加法と乗法の**交換法則**、そしてより根源的には加法（と乗法）の**結合法則**が暗黙に仮定されていることに気づく人は（生徒はともかくベテラン教員ですら）少なく、さらに、目が突くのは、最近の学校数学における数学の基礎の扱いの、ほとんど悲惨と言っても良い**徹底した非体系性**です。実際、中学校数学でときに「同類項の簡約」という奇妙な名前で登場する整数係数の文字式の計算

$$A + A = 2A, \cdots、3A + 2A = 5A, \cdots$$

についての原理的な説明は、対応する乗法の場合が

$$A \times A = A^2, \cdots、A^3 \times A^2 = A^5, \cdots$$

が「指数法則」という仰々しい名前で強調されることに比較してみると明らかでしょう。

計算について知的というにはほど遠い「公式暗記」奨励的な指導が目立つ割に、その背景に理論的な欠陥があることに配慮する《教育的な精神のゆとり》が最近、ますます減少しているのは、残念に思います。

7　連載論考: 思想としての現代数学 (5)

位相空間への第一歩 — 「現代数学」は面妖な世界ではない！

長岡 亮介

7.1　前回から今回にかけて

前回は、数学科の学生にとっては、大学ではじめて出会う現代数学の不可解な面妖性の象徴として登場する「位相空間」の起源について紹介しました。

不可解さとか面妖さというのは、単に論証や計算の過程が長く複雑であるため全体を理解が難しいというのではなく、むしろ反対に、どちらかといえば〈簡単に〉表現されている概念の定義や基本的な命題の証明が、《なぜそのようなものが数学に登場するのか》、今風の若者の表現を使えば「理由が分からない」という《素人的な根本的疑問》を解決できないまま、講義が進行して行くことへの違和感を解消できないという点に問題があるのではないかと思います。「地球上の様々な人々の使う言語」の近さ／遠さ、地球上に存在する「多種多様な人間の文化」の近さ／遠さのような問題は、多くの人が関心を寄せる問題のはずですが、それを《距離》distance のような数学的にすっきりとした言葉で語ることは困難です。しかし、東欧や北欧の国の言葉が遠く地理的な距離を隔てたアジア圏のある言語に「近い」というときは、距離のような輪郭のあまりに明確な概念では、適当とはいえないということです。

そこで《距離》よりもより適用範囲の広い《近傍》neibourhood という概念を考えます。これが位相という思想の出発点です。

近傍概念を理解するために、まず距離が考えられる世界（距離空間）S で『近傍』を考えてみましょう。集合 S の要素を「点」と呼ぶことにしましょう。点 A の「近くにある」とは「 A からの距離が小さい」ということです。集合 S の点 A からの距離が（小さな）値 ϵ 未満であるような S 内の点 P 全体の集合は、$\{P \in S | d(\mathrm{A}, \mathrm{P}) < \epsilon\}$ と表現されます。ここで、ϵ はラテン・アルファベットの e に相当するギリシャ文字で [epsion] と言う発音で呼ばれます。特にこのギリシャ文字を使う論理的な理由はありませんが、いう文化的・慣習的な理由があります。ϵ は e に相当するとはいえ、フランス語などの é と同様、発音の短い [e] に相当し、長い発音 [ē] の η という文字と対になって区別されるからです。

> このような長短のアクセントの区別は、発音の長い [ō] である Ω と短い ω にもあります。ギリシャ語では [o:mega] （「巨大なオー」）と [omikron] （「微小なオ」）という呼び名で区別されます。

S が平面上の点全体からなる集合で、距離 $d(\mathrm{A}, \mathrm{P})$ が小中学生でも知っている通常の線分 AP の長さなら、上の集合は A を中心とする半径 ϵ の円板 (ただし周は除く) を表します。S が空間なら、球体 (ただし表面は除く) ということになります。そのように、S に依存しない一般的表現を実現するためにこのような距離 ϵ を用いて定義される、A から遠くない距離にある点の集合の近傍を、しばしば「A の ϵ 近傍」と呼びます。

近傍と言うと難しそうに聞こえるかも知れませんが、「近隣」とかより平凡な「ご近所」と呼べば、ごく身近な概念であると思うでしょう。このような日常的な用語との大きな違いは、数学の「近傍」では自分自身もその中に入っていることです。A 自身が A の ϵ 近傍の要素であるということです。この意味では、「ご近所」というよりは、少し古い表現ですが、「隣組」という方が数学の「近傍」概念に近いかも知れません。

さて、近傍という数学的概念の最も重要な核心的な性質に迫りましょう。それは、ここで、先程の「ϵ 近傍」を考えるとき、上で注意したように、その境界となる円周上、あるいは球面上の点を除いて考えるところが重要なポイントであることです。数学における概念の定義という、本来は自由なはずの世界で、制約的という批判が出てもおかしくないほど、なぜそれほど細かい点にまで概念を精密かつ排他的に決めるかというと、あまり説明されることがない、ちょっとした、しかし重要な理由があります。それは、「A の近傍内の任意の点 P に対して、P のごく近くに、点 P’

をとったとき、P' が A の近傍に属さないことがある、というのは近傍の概念にふさわしくない（不都合である)」ということです。言い替えると、

「A の近傍内の任意の点 P に対して、P の十分近くに（*i.e.*P の小さな近傍内に）ある点 P' は、やはり A の近傍内にある」 $\cdots\cdots(*)$ 」

という性質は、基本概念である近傍の基本性質としてが成りたって欲しい、ということです。

より抽象的にいえば、

> 点 B が、点 A のある近傍 U(A) に属しているならば、点 B の十分近くにある（言い替えると点 B の十分小さな近傍 U(B) 内に含まれる）すべての点 P も、点 A の近傍 $U(A)$ に属するべきである $\cdots\cdots(\heartsuit)$

という性質です。

近傍という言葉を自然に捉えれば、ごく当り前の性質に見えますが、それがそうとは限らないことを距離空間における ϵ 近傍である半径 ϵ 円板や球体の場合で考えましょう。先程、近傍を境界となる周や表面は含まれないことを強調しましたが、このような与えられた近傍 U の境界上に点 P があるとを考えると、P のどんなに小さい近傍 U(P) を考えても、元の与えられた近傍 U に属する部分以外の、外部に飛び出る部分ができてしまいます。あるご近所さん U の点 P の十分近しい関係にあるご近所さん U(P) の中に、もはや元のご近所さん U に属さないものがあるというのは「ご近所さん」の言葉使いとしておかしいので、こういうものは排除しよう、というのが、「近傍からはその境界上の点を排除しなければならない」ことの根本的な数学的理由です。数直線や座標平面のような距離空間でも、近傍という概念を考える際、端点を含まない**開区間**や境界を含まない**開円板、開球**を考えるのは、近傍という概念の持つべき本質的な特性 $(\heartsuit)$ にあるのです。もちろん、数学的にはこのような開集合に限定する近傍（開近傍）の定義より、さらに一般化した近傍の定義がありますがそれはここではおいておきましょう。

学校数学では、距離空間の原型とも言うべき数直線において、$3 \leqq x \leqq 7$ のように両端を含む区間を閉区間 closed interval と呼び, 他方、$3 < x < 7$ のような端点を除く区間を開区間 open interval と呼んで、その、理論上不可能な「図示における区別」を含めて、**異様な厳格さで**その違いを強調するのですが、端点が含まれる／含まれないということそのものが重大なのではなく、距離空間における《近傍の概念からの境界の排除》という理論的な要請や、その反対に、《境界上の点までをも含む（有界な）閉集合》という概念が持つ理論的な重要性が位相数学を通じて明らかになって来たという歴史的な背景にあるのですが、こういう《細かいこと》が分かって来たのは１９世紀末以降、むしろ２０世紀になってからであるのですから、その間の歴史的な展開の知識のない高校生、大学生に区別を強要するのは、現代数学の帝国主義という批判から自由であり得ないと思います。bbbbbbbbbbbbbb

7.2 開集合の定義

ところで、以上の叙述では、近傍という位相的な表現を使っているものの、実際に考えていたのは ϵ 近傍という概念に象徴されるように、距離空間でした。距離から自由になるために距離を使っていては、話になりません。**距離を使わない近傍系の定義**が必要です。より一般的には**開集合系** という概念が必須である理由です。

開集合系を定義するための準備として重要な第一歩が、**冪（べき）集合** という概念です。その定義は、単に、ある集合 X において、X の部分集合全体の集合を X の冪（べき）集合 power set といい、$\mathfrak{P}$(X) という記号で表すというだけですが、「集合を要素とする集合」という考え方が、何事も《身近》で《具体的》な「実体」として捉えることが習慣ついている初学者には唐突で分かりにくく、かつ、$\mathfrak{P}$ (X) という記号が、「冪集合」という言葉とともになんとも面妖な印象をもって映ってしまうようですが、$\mathfrak{P}$ 自身は、power set の頭文字 P のフラクトゥア書体と呼ばれる近世西欧の印刷文化が生み出した、１９世紀以降は専らドイツで使われていた文字に過ぎません。

X と X の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}$ (X) の関係は、 X が有限集合の場合なら簡単です。実際、X が３個の要素 a, b, c からなる集合 $\{a, b, c\}$ の場合なら、

1. 要素が１個の部分集合 $\{a\}.\{b\}, \{c\}$

2. 要素が 2 個の部分集合 $\{a,b\}.\{a,c\}m\{b,c\}$

のほかに、要素が0個の部分集合（すなわち空集合 $\emptyset$）と、要素が3個の部分集合（すなわち X 自身）を入れて全部で8個の部分集合を要素とする集合 $\{\emptyset,\{a\}.\{b\},\{c\},\{a,b\}.\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ が、X の冪集合 $\mathfrak{P}$ (X) です。8 という要素の個数は、X の要素の個数である 3 と $8=2^3$ という関係で結び付いています。それは X の部分集合（冪集合 $\mathfrak{P}$ (X) の要素）が、X の各要素に対して、属す／属さないの２通りのいずれか一つを選ぶことで決定されるものであるからです。

属すを 0, 属さないを 1 と表現すれば、X の部分合とは、X から集合 $\{0,1\}$ への写像に他ならない、ということもできます。例えば集合 X= $\{a,b,c\}$ に対し、X= $\{a,b,c\}$ の部分集合 $\{a,c\}$ は $f(a)=1, f(b)=0.f(c)=1$ という写像 $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ に他ならない、ということです。

そうすれば、X の冪集合とは、X から集合 $\{0,1\}$ への写像（関数）全体ということになります。

最後に紹介したこの理解が優れているのは、X が無限集合の場合にも、その冪集合を把握しやすいことです。実際、X が最も小さい無限集合である自然数全体の集合 $\{1,2,3,4,\cdots\}$ であるとすると、その各要素に 0 または 1 を対応させたとき、X のある部分集合が決まるはずですが、自然数 n に対応する数 a_n （ここで $a_n=0$ または $a_n=1$）を小数第 n 位の数に持つ無限小数 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ を考えると、それらは、大雑把にいうと 0 以上１以下の実数に 1:1 に対応します。0 以上１以下の実数は、連続体と呼ばれることの多い、「自然数全体より濃度の濃い無限集合」として、通常の実数全体と 1:1 に対応させることができます（技術的には細かい少し面倒な話があります）ので、上で示したことは、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の冪集合が、自然数全体の無限濃度よりもはるかに多い無限個の要素を持つ実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と同じ濃度を持つと言い替えることができます。

以上上で、冪集合の途方もない大きさ＝部分集合の多様性という位相数学の舞台を感じてください。

さて、集合 X の要素である**点 P の近傍系**というのは、以下のような X のとてつもない冪集合のある小さな部分集合（すなわち、Xの部分集合のほんの一部）**N(P)** でどのような性質を持つべきものでしょうか？

例えば

- $\mathrm{P}\in\mathrm{N(P)}$

は絶対に必要な条件でしょう。

他にも、

- $\forall X,\forall Y\in\mathrm{N(P)}\longrightarrow\mathrm{X}\cap\mathrm{Y}\in\mathrm{N(P)}$
- $\forall X,\forall Y\in\mathrm{N(P)}\longrightarrow\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\in\mathrm{N(P)}$

は、外せないですね。でもまだ足りないでしょう。P に近い点 Q,R 同士で「Q の方が R より P に近い」といえるためには近傍系の持つべき性質がまだ足りません。

今回は以上にとどめ、この先は読者に任せるか、元気が続いたら次回以降もう少し先まで進めてみましょう。

いずれにせよ、位相数学で躓く学生が多いのは、大学の数学科ですら、特に位相数学では、効率重視の天下り式の講義となることが多く、このような学生自身による試行錯誤的な思考と理解に時間を避くことの数学的／教育的意味を理解しない、言い替えれば、**学生なりの発見を待てない教師が多い**せいではないかと思います。そしていつか、学生は、数学は、自分で発見できるものではなく、授業のノート＝先人の発見の努力の単なる整理を暗記することだと思い込んでしまうからでしょう。

その意味では、数学的な面白さのない、教科書的な死んだ知識の暗記を主体とする授業が学校数学を支配している遠因には、大学における抽象的な＝学生の目には分けの分からない数学の効率重視の教育もあるのではないかと思います。